

Sucesiones y límites

1. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ b) $\left\{ \left(\frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 - 3n}\right)^{2n} \right\}$ c) $\left\{ \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right)^{2n^2} \right\}$ d) $\left\{ n^{\frac{1}{1-n}} \right\}$

2. Halla el límite de la sucesión $\left\{ \frac{3n + 7}{n + 1} \right\}$ y determina qué términos distan del límite más de 0,01.

3. Marta deposita en un banco un capital de 1000 euros a un interés continuo del 3%. Teniendo en cuenta que Hacienda retiene un 20% sobre el pago de intereses, calcula el capital final que obtendrá Marta al cabo de 2 años.

4. Una persona quiere invertir 5000 euros a plazo fijo durante 3 años. El banco le ofrece, o bien un interés anual del 4% en pagos mensuales, o bien un interés continuo del 3,5% anual. ¿Cuál de las dos ofertas debe elegir?

5. Una persona invirtió 4 000 euros a interés continuo. Al final de un año obtuvo 4 120 euros. ¿Cuál fue el interés?

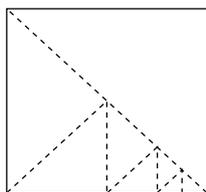
6. Juan ha comprado un camión por 60 000 euros para dedicarse al transporte de mercancías entre dos pueblos. Cobra por cada trayecto 85 euros y tiene unos gastos en gasolina de 25 euros.

- a) Escribe la sucesión que indica el total de ingresos de Juan en función de los trayectos realizados.
 b) Sabiendo que hace dos viajes al día, ¿a partir de qué día comienza a tener beneficios?

7. Razona si son monótonas crecientes o decrecientes las siguientes sucesiones:

a) $\{n^2 + (-1)^n\}$ b) $a_1 = 1; \{a_n\} = \left\{ a_{n-1} + \frac{1}{n} \right\}$

8. Construye un cuadrado de lado 1 m y córtalo por una diagonal. Corta el triángulo resultante por la mitad siguiendo la altura sobre la hipotenusa, y así sucesivamente.



Halla la sucesión que da el área de la figura resultante en función del corte realizado y calcula su límite.

9. Un grupo de alumnos quiere obtener dinero para un viaje de fin de curso. Para ello, 5 de ellos venderán bocadillos, y cada uno de los alumnos restantes preparará 10 bocadillos, que se venderán obteniendo un beneficio de 2 euros por cada uno. Las ganancias se reparten a partes iguales entre todos.

- a) ¿Qué sucesión representa las ganancias de cada persona en función del número de alumnos participantes?
 b) ¿Cuál es su límite?

SOLUCIONES

1. a) $\lim \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-(-n)} = e^{-1}$
- b) $\lim \left(1 + \frac{1}{n^2 - 3n}\right)^{\frac{n^2 - 3n}{n^2 - 3n} \cdot 2n} = e^{\lim \frac{2n}{n^2 - 3n}} = e^0 = 1$
- c) $\lim \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 - 1}{2}}\right)^{\left(\frac{n^2 - 1}{2}\right) \left(\frac{2}{n^2 - 1}\right) 2n^2} = e^{\lim \frac{4n^2}{n^2 - 1}} = e^4$
- d) $\lim (1 + n - 1)^{\frac{1}{1-n}} = \lim \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{\frac{-1}{n-1}} = e^0 = 1$

2. $\lim \frac{3 + \frac{7}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 3$

$$\frac{3n+7}{n+1} - 3 > 0,01 \Leftrightarrow \frac{4}{n+1} > \frac{1}{100} \Leftrightarrow n < 399$$

Los 398 primeros términos distan del límite menos de una centésima.

3. Al retener Hacienda el 20% del 3% que da el banco, el interés real que recibe Marta es el 80% del 3%, es decir, $i = 2,4\%$. El capital al cabo de dos años será: $C = 1000e^{(0,024)2}$ euros = 1049,17 euros.

4. Con la primera opción:

$$C = 5000 \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{36} \text{ euros} = 5636,36 \text{ euros.}$$

Con la segunda opción:

$$C = 5000e^{(0,035)3} \text{ euros} = 5553,55 \text{ euros.}$$

Es más ventajosa la primera opción.

5. $4120 = 4000e^r \Rightarrow e^r = 1,03 \Rightarrow r = \ln 1,03 \Rightarrow$
 $\Rightarrow r = 2,96\%$
 El interés fue del 2,96%.

6. a) $\{a_n\} = \{(85 - 25)n\} = \{60n\}$, siendo n el número de trayectos.
 b) Los ingresos diarios de Juan son 120 euros; por tanto, $120d > 60000 \Leftrightarrow d > 500$. Pasados 500 días comienza a obtener beneficios.

7. a) La sucesión es: $\{0, 5, 8, 17, 24, \dots\}$.

$$a_{n+1} = \begin{cases} n^2 + 2n & \text{si } n \text{ es par} \\ n^2 + 2n + 2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} n^2 + 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ n^2 - 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

La sucesión es monótona creciente, pues $a_{n+1} > a_n$.

- b) La sucesión es: $\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \dots\right\}$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1} > a_n, \text{ puesto que } \frac{1}{n+1} > 0$$

para todo n natural; por tanto, se trata de una sucesión monótona creciente.

8. La sucesión buscada es:

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\} \text{ y } \lim \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

9. a) Si participan n alumnos, como 5 no preparan bocaballos, las ganancias son $20(n - 5)$ euros.

$$\text{Así, cada alumno gana } \left\{\frac{20(n-5)}{n}\right\} \text{ euros.}$$

- b) $\lim \frac{20n-100}{n} \text{ euros} = 20 \text{ euros.}$