

Distribuciones continuas. La distribución normal

1. Se considera la función:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{5-x}{k} & \text{si } -5 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x \notin [-5, 1] \end{cases}$$

Determina el valor de k para que f sea función de densidad y calcula $p(0 \leq X \leq 1)$ a partir del gráfico.

2. Una distribución normal tiene de media 50 y se sabe que el 7% de los casos están por encima de 70.
 - a) Calcula su desviación típica.
 - b) ¿Cuál será la probabilidad de los casos que están por debajo de 45?
3. Halla el valor de t para que $p(X \geq t) = 0,49$, estando distribuida la variable aleatoria X según una $N(15, 3)$.
4. Si una serie de medidas se distribuyen normalmente, halla qué porcentaje de ellas diferirán de la media en:
 - a) más de la mitad de la desviación típica;
 - b) menos de tres cuartas partes de la desviación típica.
5. En un examen se formulan 38 preguntas del tipo verdadero-falso. Para aprobar hay que contestar correctamente al menos 22 preguntas. Un alumno que no ha estudiado mucho decide presentarse y lanza una moneda para decidir la respuesta de cada pregunta. Calcula la probabilidad de que el estudiante apruebe el examen.
6. En cierta gasolinera se ha observado que el 62% de los vehículos, con cuatro o más ruedas, son automóviles de turismo y el resto camiones. Se estudia el paso de 2 000 vehículos, y X indica el número de ellos que se detienen. Determina la función de probabilidad de X .
7. En una clase hay 15 alumnos y 20 alumnas. El peso medio de los 15 alumnos es de 58,2 kg, y el de las 20 alumnas, 52,4 kg. Se supone que las desviaciones típicas de los dos grupos son 3,1 kg y 5,1 kg, respectivamente. El peso de un alumno es 70 kg y el de una alumna es 65 kg. ¿Cuál de ellos, dentro del grupo de alumnos de su sexo, puede considerarse más grueso?
8. Los pesos en kilogramos de 20 jóvenes son:

51, 49, 55, 53, 49, 47, 48, 50, 43, 60, 48, 54, 62, 57, 46, 49, 52, 42, 38, 61

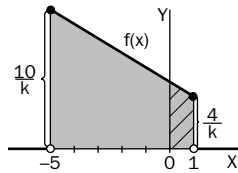
 - a) Agrupa los datos en intervalos de amplitud 5, siendo el extremo inferior del primer intervalo 37,5.
 - b) Dibuja el histograma de frecuencias y calcula la media y la desviación típica de los datos agrupados.
 - c) Compara la proporción de observaciones en el primer intervalo con la que cabría esperar bajo una distribución normal de media 50 y desviación típica 6,4.
9. El tiempo empleado por los estudiantes con relación a cierta prueba se distribuye normalmente con media 30 minutos y desviación típica 5.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tarde menos de 28 minutos en finalizar la prueba?
 - b) Calcula la proporción de estudiantes que emplean entre 25 y 35 minutos.
 - c) ¿Qué tiempo emplea como máximo el 80% de los estudiantes?

SOLUCIONES

1. Es necesario que $f(x) \geq 0$ en su dominio.

$$1 = \frac{\frac{10}{k} + \frac{4}{k}}{2} \cdot 6 \Leftrightarrow k = 42$$

solución que tiene sentido.



$$p(0 \leq X \leq 1) = \text{área rayada} = \frac{\frac{5}{42} + \frac{4}{42}}{2} = 0,1071$$

2. a) $p(X > 70) = 0,07 \Rightarrow p\left(Z > \frac{70-50}{\sigma}\right) = 0,07 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{70-50}{\sigma} = 1,48 \Rightarrow \sigma = 13,51$

b) $p(X < 45) = p\left(Z < \frac{45-50}{13,51}\right) = p(Z < -0,37) =$
 $= 0,3557$

3. Sea $z = \frac{t-15}{3}$ el valor tipificado de t .

$p(Z \geq z) = 0,49 < 0,5 \Rightarrow z$ tiene que ser positivo.

$$p(Z \geq z) = 1 - p(Z < z) = 0,49 \Rightarrow p(Z < z) = 0,51 \Rightarrow$$

 $\Rightarrow z = 0,025 \Rightarrow t = 15,075$

4. a) $p\left(|X - \mu| > \frac{\sigma}{2}\right) = 1 - p\left(\mu - \frac{\sigma}{2} < X < \mu + \frac{\sigma}{2}\right) =$
 $= 1 - p\left(-\frac{1}{2} < Z < \frac{1}{2}\right) = 0,6170 \Rightarrow 61,7\%$

b) $p\left(\mu - \frac{3\sigma}{4} < X < \mu + \frac{3\sigma}{4}\right) = p\left(-\frac{3}{4} < Z < \frac{3}{4}\right) =$
 $= 0,5468$. El porcentaje es del 54,68%.

5. La variable X que expresa el número de respuestas correctas es $B(38; 0,5)$.

Como $np = 19 \geq 5$ y $nq = 19 \geq 5$, X se aproxima por X' , que es $N(19; \sqrt{9,5}) = N(5; 3,08)$.

Se busca $p(X \geq 22) = p(X' \geq 21,5) =$

$$= p\left(Z \geq \frac{21,5-19}{3,08}\right) = p(Z \geq 0,811) =$$

$$= 1 - p(Z < 0,811) = 1 - 0,7910 = 0,2090$$

6. X es $B(2\,000; 0,62)$, y su función de probabilidad:

$$p(X=i) = \binom{2000}{i} \cdot 0,62^i \cdot 0,38^{2000-i}$$

para $i: 1, 2, \dots, 2\,000$

7. Para poder comparar los pesos hay que tipificarlos:

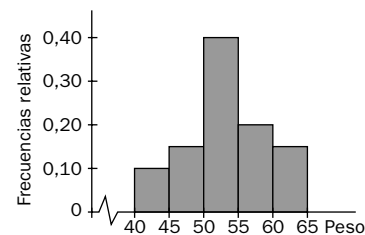
$$\frac{70-58,2}{3,1} = 3,806 \text{ y } \frac{65-52,4}{5,1} = 2,470$$

El chico es más grueso, dentro de su grupo, pues $3,806 > 2,470$.

8. a)

Intervalos	c_i	n_i	f_i
[37,5, 42,5)	40	2	0,10
[42,5, 47,5)	45	3	0,15
[47,5, 52,5)	50	8	0,40
[52,5, 57,5)	55	4	0,20
[57,5, 62,5)	60	3	0,15
		20	1

- b)



- c) En el primer intervalo están el 10% de los datos, y $p(37,5 \leq X \leq 42,5) =$

$$= p\left(\frac{37,5-50}{6,4} \leq Z \leq \frac{42,5-50}{6,4}\right) =$$

$$= p(-1,95 \leq Z \leq -1,17) = 0,9744 - 0,8790 =$$

$= 0,0954$, que supone el 9,54% de los datos; por tanto, se obtienen valores similares.

9. La variable X que expresa el tiempo, en minutos, empleado en realizar la prueba es $N(30,5)$.

a) $p(X < 28) = p\left(Z < \frac{28-30}{5}\right) = p(Z < -0,4) =$
 $= 0,6554$

b) $p(25 \leq X \leq 35) = p(-1 \leq Z \leq 1) = 1 - 2p(Z < -1) =$
 $= 1 - 2 \cdot 0,1587 = 0,6826$. El 68,26% de los estudiantes emplean entre 25 y 35 minutos.

c) $p(X < t) = p\left(Z < \frac{t-30}{5}\right) = 0,8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{t-30}{5} = 0,84 \Rightarrow t = 34,2$$

El 80% de los estudiantes emplea 34 minutos.