ediciones sm

Derivadas

1. Dada la función $f(x)=\begin{cases} -(x^2+2) & \text{si } x\leq 1 \\ x^2-4x & \text{si } x>1 \end{cases}$, razona si existe $f'(1)$ y, en caso afirmativo, halla su valor.

2. Considera la curva $f(x)=x^2-2x$. Halla:

a) Los puntos de la curva cuya recta tangente es paralela al eje de abscisas.

b) Los puntos de la curva cuya recta tangente es paralela a la recta $x+2y-4=0$.

c) Los puntos de la curva cuya recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

d) Los puntos de la curva para los que la pendiente de la recta tangente se encuentra comprendida entre 2 y 4.

3. Aplica la regla de la cadena para derivar las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln(\operatorname{sen} x)$

b) $\cos^2 x$

c) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

d) $f(x)=e^{\sqrt{\cos x}}$

e) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

f) $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$

4. Halla la función derivada de $f(x)=\left|x^2+x-6\right|$.

5. La relación entre los beneficios de una empresa, en miles de euros, obtenidos por la venta de un determinado producto, y el tiempo x, expresado en años, que dicho producto lleva en el mercado, viene dada por la función $B(x)=\dfrac{25x}{x^2+81}$

a) ¿En qué períodos los beneficios de la empresa crecen y el cuáles decrecen?

b) Indica cuántos años debe estar el producto en el mercado para que los beneficios sean máximos.

c) ¿Hay algún momento en el que la venta de este producto produzca pérdidas?

d) ¿Qué pasa si la empresa mantiene muchos años el producto en el mercado?

6. Una imprenta recibe el encargo de realizar unos folletos publicitarios que contengan 24 cm^2 de texto impreso, con la condición de que los márgenes laterales sin texto del folleto sean de 3 cm, y los márgenes superior e inferior, de 2 cm. ¿Qué dimensiones debe tener el folleto para que el gasto de papel sea mínimo?

7. Una empresa ha estimado que el coste de producción, en euros, de x unidades diarias de un determinado producto viene dado por la función $C(x)=\dfrac{x^2}{50}+x+1$, y el precio de venta de dicho producto, por unidad, es $10-\dfrac{x}{25}$ euros. Calcula el número de unidades diarias de dicho producto que debe vender la empresa para que sus beneficios sean máximos.

8. El espacio que recorre un coche en los primeros 10 minutos desde que sale de un garaje hasta el momento en que entra en una autopista sigue la ecuación $e(t)=\dfrac{3t^2}{40}$, donde el tiempo viene dado en minutos y el espacio en kilómetros.

a) ¿Cuál es la velocidad media del coche en estos 10 minutos?

b) ¿A qué velocidad va en el momento en que entra en la autopista? Exprésala en km/h.

c) Días más tarde, el conductor recibió una multa porque en el minuto 6, según el radar de la policía, rebasó el límite de 50 km/h existente en el lugar por el que estaba pasando. ¿Está bien puesta la multa?

SOLUCIONES

1. La función es continua en 1, y además:

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-[(1+h)^2+2]+3}{h} = -2$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-4(1+h)+3}{h} = -2$$

Como las derivadas laterales coinciden en 1, existe $f'(1) = -2$.

2. a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

En el punto (1, –1).

b) $f'(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x-2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

En el punto $\left(\frac{3}{4},\ -\frac{15}{16}\right)$.

c) $f'(x) = -1 \Rightarrow 2x-2 = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

En el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

d) $2 < 2x - 2 < 4 \Leftrightarrow 2 < x < 3$

3. a) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

b) $f'(x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x$

c) $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

d) $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{\cos x}} \operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

f) $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2+1}$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2+x-6 & \text{si } x<-3 \\ -x^2-x+6 & \text{si } -3\le x\le 2 \\ x^2+x-6 & \text{si } x>2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<-3 \\ -2x-1 & \text{si } -3<x<2 \\ 2x+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

f no es derivable ni en –3 ni en 2.

5. a) $B'(x) = \dfrac{2025-25x^2}{(x^2+81)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow B'(x)>0 \Leftrightarrow 2025-25x^2>0 \Rightarrow x<9$, pues la solución negativa no tiene sentido en el contexto del problema. Los beneficios crecen los nueve primeros años y decrecen después de esa fecha.

b) $B'(x) = 0$ si $x = 9$, como $B''(9) < 0$, $x = 9$ es un máximo.

El producto debe estar en el mercado 9 años.

c) $B(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$, ya que siempre $x^2 + 81 > 0$. Como x no toma valores negativos en el contexto del problema, nunca se producen pérdidas.

d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{25x}{x^2+81} = 0$; tendrá beneficios nulos.

6. Si las dimensiones del texto impreso son x e y, hay que buscar un mínimo de la función:

$$f(x) = (x+6)\left(\frac{24}{x}+4\right) = 4x + \frac{144}{x} + 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{144}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 6$$

Al ser $f''(6)>0$, $x = 6$ es un mínimo.

Las dimensiones del folleto son 12 x 8 cm.

7. $B(x) = x\left(10-\dfrac{x}{25}\right)-\left(\dfrac{x^2}{50}+x+1\right) = -\dfrac{3x^2}{50}+9x-1$

$B'(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - \dfrac{3x}{25} = 0 \Leftrightarrow x = 75$

Como $B''(75) < 0$, $x = 75$ es un máximo.

8. a) $v_m = \dfrac{e(10)-e(0)}{10-0} = \dfrac{3}{4}$; velocidad: 45 km/h.

b) $e'(x) = \dfrac{3t}{20} \Rightarrow e'(10) = \dfrac{3}{2}$

La velocidad era de $\frac{3}{2}$ km/min = 90 km/h.

c) $e'(6) = \dfrac{9}{10}$

La velocidad era $\frac{9}{10}$ km/min = 54 km/h; por tanto, la multa estaba justificada.