

## Expresiones algebraicas

- ¿Es divisible  $x^{12} - 1$  entre  $x - 1$ ? ¿Y  $x^9 - 1$  entre  $x + 1$ ?
- ¿Para qué valores de  $n$ ,  $x^n - 1$  es divisible entre  $x - 1$ ? ¿Y entre  $x + 1$ ?
- ¿Es  $x^4 - 4$  múltiplo de  $x^2 - 2$ ? Razónalo sin efectuar la división.
- Escribe un polinomio de tercer grado que se anule para  $x = 0$ ,  $x = 2 - \sqrt{2}$  y  $x = 2 + \sqrt{2}$ .
- Encuentra un polinomio que al dividirlo por  $x^2 + 1$  dé de cociente  $x + 3$  y de resto  $x - 7$ .
- Simplifica al máximo las siguientes fracciones algebraicas:
  - $\frac{3x}{6x^3 - 9x^2}$
  - $\frac{x^2 - a^2}{(x + a)^2}$
  - $\frac{5x^2}{15x + 5}$
  - $\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$
  - $\frac{x^3 - x}{x^4 + 2x^3 + x^2}$
- Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:
  - $2x - \frac{x - 6}{x - 3}$
  - $\frac{1}{x} - \frac{x}{x - 3} + \frac{x - 1}{x + 3}$
  - $\frac{x + 1}{x - 1} : \frac{x - 1}{x + 1}$
- Considera el polinomio  $P(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ . Halla  $a$  y  $b$  en cada uno de los siguientes casos:
  - $P(x)$  es divisible por  $x^2 + x - 2$ .
  - $P(x)$  es divisible por  $x - 2$ , y su valor numérico para  $x = 1$  es 2.
  - $P(x)$  puede ser escrito de la forma  $(x - 1)^3$ .
- Escribe como producto de factores los polinomios:
  - $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$
  - $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy$
- Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de  $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$  y  $Q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ .
- Una empresa textil fabrica camisas, pantalones y chaquetas. El coste de producción es de 8, 15 y 25 euros, respectivamente, por prenda. Suponiendo que su capacidad de producción es de 300 prendas diarias, que pone en el mercado a un precio global de 5 000 euros:
  - Expresa en forma de polinomio cuál es el beneficio diario de la empresa, en función de las camisas, pantalones y chaquetas fabricadas.
  - Suponiendo que fabrica el doble de camisas que de pantalones, expresa en forma de polinomio el número de chaquetas producidas en función de los pantalones fabricados diariamente.
  - Suponiendo que un día determinado produjo 150 camisas y 80 pantalones, ¿cuántas chaquetas fabricó si el beneficio neto de ese día fueron 1 000 euros?
- Una persona tiene un capital de 2 000 euros y decide colocar una parte en un fondo de inversiones que le da un 5% de beneficios anual. Con la otra parte juega en bolsa, y pierde, al cabo de un año, una cuarta parte del capital invertido.
  - Escribe, en forma de polinomio, el capital que tiene al cabo de un año en función de la parte que destinó al fondo de inversiones.
  - ¿Qué parte invirtió en bolsa si, al cabo del año, su capital seguía siendo los 2 000 euros iniciales?

# SOLUCIONES

1. Por el teorema del resto, como  $1^{12} - 1 = 0$ ,  $x^{12} - 1$  es divisible entre  $x - 1$ .  
Al ser  $(-1)^9 - 1 = -2 \neq 0$ ,  $x^9 - 1$  no es divisible entre  $x + 1$ .
- 
2. Por ser  $(1)^n - 1 = 0$  para todos los valores de  $n$ ,  $x^n - 1$  es divisible entre  $x - 1$ .  
Como  $(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$   
 $x^n - 1$  sólo es divisible por  $x + 1$  cuando  $n$  es par.
- 
3. Sí, pues  $x^2 - 2$  es un factor de  $x^4 - 4$ ;  
 $(x^4 - 4) = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$
- 
4.  $P(x) = (x-0)[x-(2-\sqrt{2})][x-(2+\sqrt{2})] = x^3 - 4x^2 + 2$
- 
5.  $D(x) = (x^2 + 1)(x + 3) + (x - 7) = x^3 + 3x^2 + 2x - 4$
- 
6. a)  $\frac{3x}{3x(2x^2 - 3x)} = \frac{1}{2x^2 - 3x}$   
b)  $\frac{x^2 - a^2}{(x + a)^2} = \frac{(x - a)(x + a)}{(x + a)^2} = \frac{x - a}{x + a}$   
c)  $\frac{5x^2}{15x + 5} = \frac{x^2}{3x + 1}$   
d)  $\frac{(x - 1)(x + 2)(x + 3)}{(x + 3)(x - 1)^2} = \frac{x + 2}{x - 1}$   
e)  $\frac{x(x - 1)(x + 1)}{x^2(x + 1)^2} = \frac{x - 1}{x(x + 1)}$
- 
7. a)  $\frac{2x(x - 3) - (x - 6)}{x - 3} = \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 3}$   
b)  $\frac{(x - 3)(x + 3) - x^2(x + 3) + x(x - 1)(x - 3)}{x(x - 3)(x + 3)} =$   
 $= \frac{-6x^2 + 3x - 9}{x^3 - 9x}$   
c)  $\frac{(x + 1)^2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$
- 
8. a) Al ser  $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$  factor de  $P(x)$ , éste es divisible por  $(x - 1)$  y  $(x + 2)$ , luego:  
 $\begin{cases} P(-2) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = 20 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 8 \end{cases}$   
b)  $\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2a + b = 0 \\ 1^3 - 3 \cdot 1^2 + a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 4 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = 4$   
c)  $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow a = 3, b = -1$
- 
9. a)  $(x - y)^2 - z^2 = (x - y - z)(x - y + z)$   
b)  $x^2 - (y + z)^2 = (x - y - z)(x + y + z)$
- 
10.  $\begin{cases} P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x + 2)(x - 2) \\ Q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3) \end{cases} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \begin{cases} \text{m.c.d.}(P, Q) = (x + 1)(x - 2) \\ \text{m.c.m.}(P, Q) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 3) \end{cases}$
- 
11. Las variables  $c$ ,  $p$ ,  $q$  representan, respectivamente, las camisas, los pantalones y las chaquetas fabricadas.  
a) El beneficio en euros es:  
 $B = 5\,000 - (8c + 15p + 25q) =$   
 $= 5\,000 - 8c - 15p - 25q$   
b)  $\begin{cases} c = 2p \\ c + p + q = 300 \end{cases} \Rightarrow q = 300 - c - p = 300 - 3p$   
c)  $B = 5\,000 - 8c - 15p - 25q =$   
 $= 5\,000 - 8 \cdot 150 - 15 \cdot 80 - 25q = 1\,000 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 25q = 1\,600 \Rightarrow q = 64$
- 
12. Si  $x$  son los euros destinados al fondo de inversión,  $2000 - x$  es la parte que juega en bolsa.  
a)  $C(x) = x + \frac{5x}{100} + \frac{3}{4}(2000 - x) = \frac{3x + 15000}{10}$   
b)  $C(x) = \frac{3x + 15000}{10} = 2000 \Leftrightarrow 3x = 5000 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 1666,67$   
En bolsa invirtió 333,33 euros.