

Logaritmos, progresiones y matemática financiera

1. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_2 \frac{\sqrt[6]{64} \cdot 4^2}{2^5 \cdot \sqrt[3]{512}}$

b) $\log_5 \frac{25 \cdot \sqrt[4]{625}}{125}$

c) $\log_3 \frac{27 \cdot \sqrt{729}}{81 \cdot \sqrt[3]{27}}$

2. Conociendo que $\log 2 = 0,3010$, y que $\log 3 = 0,4771$, calcula el valor de:

a) $\log 12$

b) $\log \sqrt[5]{4,8}$

c) $\log (6,4 \cdot \sqrt{2,4})$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $3^{\frac{2x+1}{3}} = 27$

c) $\log (3x + 5) - \log (2x + 1) = 1 - \log 5$

b) $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$

d) $\log_x 100 - \log_x 25 = 2$

4. Comprueba que:

a) $\log_a x + \log_a y = 0 \Rightarrow xy = 1$

b) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

5. Una pareja decide ahorrar 5 euros cada mes durante su primer año de matrimonio, 15 euros cada mes del segundo año, 25 euros cada mes del tercer año, y así sucesivamente, aumentando la cantidad mensual 10 euros cada año. Halla la cantidad ahorrada al final del decimoquinto año.
6. Un número está formado por tres cifras en progresión aritmética, siendo su suma igual a 15. Se sabe que si se multiplica la cifra de las centenas por 129, se obtiene el número en cuestión. ¿Cuál es el número buscado?
7. En una población que cuenta con 88 573 habitantes mayores de quince años, uno de ellos se entera de una noticia en un momento. Al cabo de un minuto lo ha comunicado a tres de sus amigos. Cada uno de éstos lo comunica en otro minuto a otras tres personas distintas, las cuales continúan extendiendo la noticia de igual modo, y así sucesivamente. ¿Al cabo de cuánto tiempo se habrán enterado todos los habitantes mayores de 15 años?
8. La cuarta parte de un capital colocado al 4% durante dos años produce cierto interés. El resto del capital al 5% en un año produce otro interés. La suma de ambos intereses es 345 euros. Halla el capital.
9. ¿A qué interés compuesto debe depositarse un capital de 6 000 euros si en tres años se ha convertido en 6 749,20 euros?

SOLUCIONES

1. a) $\log_2 \frac{2 \cdot 2^4}{2^5 \cdot 2^3} = \log_2 2^{-3} = -3 \log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$

b) $\log_5 \frac{5^2 \cdot 5}{5^3} = \log_5 1 = 0$

c) $\log_3 \frac{3^3 \cdot 3^3}{3^4 \cdot 3} = \log_3 3 = 1$

2. a) $\log(3 \cdot 2^2) = \log 3 + 2 \log 2 =$
 $= 0,4771 + 2 \cdot 0,3010 = 1,0791$

b) $\frac{1}{5} \log \frac{48}{10} = \frac{1}{5} [\log(2^4 \cdot 3) - \log 10] =$
 $= \frac{1}{5} [4 \log 2 + \log 3 - 1] = 0,1362$

c) $\log \frac{64}{10} + \frac{1}{2} \log \frac{24}{10} = \log 2^6 - \log 10 +$
 $+ \frac{1}{2} [\log(2^3 \cdot 3) - \log 10] =$
 $= 6 \log 2 - 1 + \frac{1}{2} (3 \log 2 + \log 3 - 1) =$
 $= \frac{15}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{3}{2} = 0,9961$

3. a) $3^{\frac{2x+1}{3}} = 3^3 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = 9 \Leftrightarrow x = 4$

b) $2^x(2+1+\frac{1}{2}) = 28 \Leftrightarrow \frac{7}{2} 2^x = 28 \Leftrightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 3$

c) $\log(3x+5) - \log(2x+1) + \log 5 = \log 10 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log \frac{5(3x+5)}{2x+1} = \log 10 \Leftrightarrow \frac{5(3x+5)}{2x+1} = 10 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x+5 = 4x+2 \Leftrightarrow x = 3$

d) $\log_x \frac{100}{25} = \log_x x^2 \Leftrightarrow \log 4 = \log x^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = 2$

La solución negativa, -2 , no es válida, ya que la base del logaritmo tiene que ser positiva.

4. a) $\log_a x + \log_a y = 0 \Rightarrow \log_a xy = 0 = \log 1 \Rightarrow xy = 1$

b) Si $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$

Tomando logaritmos en base b :

$$\log_b a^x = \log_b b \Leftrightarrow x \log_b a = \log_b b = 1$$

Sustituyendo x se tiene $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

5. La sucesión de cantidades anuales ahorradas en euros: 60, 180, 300, ... es una progresión aritmética de primer término 60 y diferencia 120.

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15})15}{2} = \frac{[a_1 + (a_1 + 14d)]15}{2} =$$

$$= \frac{[60 + (60 + 14 \cdot 120)]15}{2} = 13\,500$$

La cantidad ahorrada será 13 500 euros.

6. Sean x , $x + d$, $x + 2d$ las cifras de las centenas, decenas y unidades, respectivamente.

$$\begin{cases} x + x + d + x + 2d = 15 \\ 129x = 100x + 10(x + d) + x + 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ d = 3 \end{cases}$$

El número pedido es 258.

7. Se considera la siguiente tabla:

Minuto	0	1	2	3	...
N.º de personas	1	3	9	27	...

El número de personas, mayores de 15 años, que acceden a conocer la noticia en cada minuto forma una progresión geométrica de primer término 3 y razón 3. Como se empieza en $n = 0$:

$$S_n = 88\,573 - 1 = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{n+1} = 177\,147 = 3^{11} \Leftrightarrow n = 10$$

La solución es 10 minutos.

8. $\frac{C}{4} \cdot 2 \cdot 0,04 + \frac{3C}{4} \cdot 1 \cdot 0,05 = 345 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0,23C = 1\,380 \Leftrightarrow C = 6\,000$$

El capital es de 6 000 euros.

9. $6\,749,20 = 6\,000(1+r)^3 \Leftrightarrow (1+r)^3 = 1,1248$

Tomando logaritmos:

$$3 \log(1+r) = \log 1,1248 \Rightarrow \log(1+r) = 0,017 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+r = 10^{0,017} \Rightarrow r = 0,0399$$

El interés compuesto es del 4% anual.