Límites y continuidad

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x})$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x-1} - 1 \right)$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-2}}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1+\sqrt{x^2-x}}$

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} \right)^{x+2}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x$

3. Estudia la continuidad de la función $f(x) = |x-2|$ en el punto correspondiente a $x = 2$.

4. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x \le 2 \\ x^2+2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y estudia su continuidad.

5. ¿Qué valor debe tomar a para que la función $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x \le 1 \\ 5-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en R?

6. Indica las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = xe^x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+\operatorname{sen} x}{x}$

7. Un comercio decide saldar un lote de jabones, de forma que si se compran 10 unidades o menos el precio de cada pastilla es de 0,90 euros, pero si el número de pastillas compradas supera a 10, por cada x jabones comprados, el importe de la factura viene dado por la función $f(x) = \sqrt{0{,}36x^2+45}$.

a) Escribe la función que determina el precio a pagar, dependiendo del número de pastillas compradas.

b) ¿Es discontinua la función en algún punto?

c) ¿Cuál es el precio al que tiende cada pastilla de jabón en el caso de que se decida comprar un número muy grande de unidades?

8. En una reserva natural se ha realizado un estudio sobre cierto tipo de pájaros y se ha llegado a la conclusión de que el número de individuos de la colonia vendrá dado, en los próximos años, por la función $f(x) = \dfrac{15\,000x+6\,600}{3x+1}$, donde x representa el número de años transcurridos a partir del momento en el que se ha realizado el estudio.

a) ¿Cuántos pájaros había en el momento de realizar el estudio? ¿Cuántos habrá dentro de 3 años?

b) ¿Llegará a extinguirse la población de pájaros de la reserva o tiende a estabilizarse en torno a un determinado número de individuos?

SOLUCIONES

1. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \dfrac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{1-\dfrac{1}{x}} - 1 \right) = 1-1 = 0$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-2}}{(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} (x-1)\sqrt{x-2} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{3})\,(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})}{x(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x}{x(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \dfrac{-1}{2\sqrt{3}}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2+(\sqrt{x}\,\sqrt{x-1})} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} = \sqrt{2}$

2. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

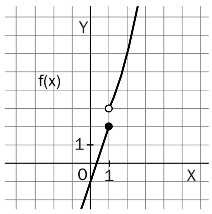
b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{x+2} = \lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{x+2} = e$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} 3^x = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

3. $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } \ x<2 \\ x-2 & \text{si } \ x\geq 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 0 \Rightarrow f$ continua en 2.

4.



f es continua en $R-\{2\}$, pues $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 5 \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 6$

5. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = a+1$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 5-a$

Para tener continuidad: $a+1 = 5-a \Leftrightarrow a = 2$.

6. a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ es asíntota por la izquierda.

No tiene asíntotas verticales, por ser continua en todo R. Tampoco tiene asíntotas oblicuas.

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, luego no tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (f(x)-x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$

la recta $y = x$ es asíntota oblicua.

f no tiene asíntotas horizontales.

7. a) $f(x) = \begin{cases} 0{,}9x & \text{si } x\leq 10 \\ \sqrt{0{,}36x^2+45} & \text{si } x>10 \end{cases}$

b) No, porque $\lim\limits_{x\to 10^-} f(x) = f(10) = 9 = \lim\limits_{x\to 10^+} f(x)$

c) El precio de cada pastilla es $\dfrac{f(x)}{x}$. Comprando muchas unidades, el precio en euros será

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{0{,}36x^2+45}}{x} = 0{,}6$

8. a) Al realizar el estudio había $f(0) = 6\,600$ pájaros, y al cabo de tres años $f(3) = 5\,160$ pájaros.

b) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{15\,000x+6\,600}{3x+1} = 5\,000$

La población tiende a estabilizarse en 5 000 individuos.