

Sistemas de ecuaciones e inecuaciones

1. Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + ay = 4 \\ ax + y = 1 \end{cases}$. Halla el valor de a para que el sistema sea:

 - a) compatible determinado;
 - b) incompatible;
 - c) compatible indeterminado.
2. Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \frac{x-1}{y-1} = \frac{y+1}{x+1} \\ x - y = 2 \end{cases}$
3. Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} xy = 20 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$
4. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2xy + y^2 = -3 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$
5. Aplica el método de Gauss para resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$
6. Discute, según los valores del parámetro a , el siguiente sistema y resuélvelo cuando sea compatible:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + z = 1 \\ x - ay = 1 \end{cases}$$
7. Discute según los valores del parámetro a , el siguiente sistema y resuélvelo cuando sea compatible:

$$\begin{cases} x + ay = 0 \\ x + a^2y = 0 \end{cases}$$
8. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones:

 - a) $\begin{cases} x \geq y \\ x < -y \end{cases}$
 - b) $\begin{cases} \frac{x}{y-1} > 1 \\ \frac{y}{x-1} > 1 \end{cases}$
9. Se desea mezclar café de dos clases A y B hasta obtener un total de 150 kg de café. El café de clase A cuesta 2,20 euros/kg y el café de clase B cuesta 3,40 euros/kg. Halla los kilogramos que debemos mezclar de cada clase para que el precio de la mezcla resultante sea de 3 euros/kg.
10. Una empresa contrata una campaña publicitaria de anuncios en televisión, cuñas radiofónicas y vallas publicitarias por un total de 100 000 euros. El gasto que va a hacer en anuncios por televisión va a ser el triple que la suma del costo de la campaña en la radio y en vallas publicitarias y, a su vez, en vallas publicitarias va a gastar 5 000 euros más que en cuñas radiofónicas. ¿Cuánto dinero va a invertir en cada tipo de anuncio?
11. Un centro escolar organiza un viaje de un día para 200 alumnos y contrata una empresa que dispone de dos tipos de autobuses: los de clase A de 30 plazas y los de clase B de 45 plazas. Se sabe que la empresa sólo dispone de 5 conductores y que el alquiler de los autobuses de clase A es 120 euros y el de clase B 160 euros diarios. ¿Cómo debe organizarse el viaje para que el costo sea el menor posible?

SOLUCIONES

1. Si $a = 0$, el sistema es compatible determinado:
 $x = 4, y = 1$.

Multiplicando por a la primera ecuación:

$$\begin{cases} ax + a^2 y = 4a \\ ax + y = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - y + a^2 y = 4a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 - 1)y = 4a - 1$$

- a) Si $a \neq \pm 1, a \neq 0$, el sistema es compatible

determinado: $y = \frac{4a-1}{a^2-1}, x = \frac{a-4}{a^2-1}$

- b) Si $a = -1$, el sistema $\begin{cases} x - y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

es incompatible pues, $4 \neq -1$.

Si $a = 1$, $\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

es incompatible pues, $4 \neq 1$.

- c) En ningún caso es compatible indeterminado.

2. $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x = y + 2 \end{cases} \Rightarrow (y+2)^2 = y^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4y + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

3. $\begin{cases} y = \frac{20}{x} \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{20}{x}\right)^2 = 41 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^4 - 41x^2 + 400 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4, y=5 \\ x=-4, y=-5 \\ x=5, y=4 \\ x=-5, y=-4 \end{cases}$$

4. $\begin{cases} 2xy + y^2 = -3 \\ x = \frac{-2y}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{-4y^2}{3} + y^2 = -3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} y=3, x=-2 \\ y=-3, x=2 \end{cases}$$

5. $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = -z \end{cases}$

Sistema compatible indeterminado.

6. Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y = 1 \\ (1-a)y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a+1 \\ y = 1 \\ z = -a \end{cases}$$

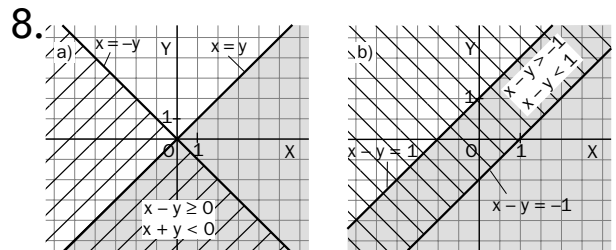
Sistema compatible determinado para todo a .

7. Restando ambas ecuaciones: $(a^2 - a)y = 0$.

$a \neq 0, a \neq 1 \Rightarrow y = 0, x = 0$; compatible determinado.

$a = 0 \Rightarrow x = 0$; compatible indeterminado.

$a = 1 \Rightarrow x = -y$ e y puede tomar cualquier valor;
compatible indeterminado.



9. Sean a y b los kg de café de las clases A y B respectivamente.

$$\begin{cases} a + b = 150 \\ 2,20a + 3,40b = 3 \cdot 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 150 - b \\ 2,20a + 3,40b = 450 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2,20(150 - b) + 3,40b = 450 \Leftrightarrow 1,20b = 120 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = 100, a = 50$$

10. Sean t, r, v los miles de euros destinados a televisión, radio y vallas, respectivamente.

$$\begin{cases} t + r + v = 100 \\ t = 3(r + v) \\ v = r + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + r + v = 100 \\ t - 3r - 3v = 0 \\ v - r = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t + r + v = 100 \\ r + v = 25 \\ v - r = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 75 \\ r = 10 \\ v = 15 \end{cases}$$

11. Sean a y b los autobuses de las clases A y B , respectivamente:

$$\begin{cases} a + b \leq 5 \\ 30a + 45b \geq 200 \end{cases} \Rightarrow a \leq \frac{5}{3}; b \geq \frac{10}{3}$$

Al ser a y b enteros, los valores que hacen mínimo el gasto son $a = 1$ y $b = 4$.

El gasto en euros sería $120 \cdot 1 + 160 \cdot 4 = 760$.