Estudio y representación de funciones

1. Halla, cuando existan, las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{(x - 2)^2}{x - 1}$

Calcula, si existen, los puntos en los que las asíntotas cortan la gráfica de la función.

2. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1 - 2x}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) ¿Cuál es su dominio?

b) ¿Es continua en $x = 1$?

c) ¿Es derivable en $x = 1$?

d) ¿Cuáles son sus intervalos de crecimiento y decrecimiento?

e) ¿Cuáles son sus extremos?

f) ¿Tiene asíntotas?

g) Dibuja su gráfica.

3. Una empresa lanza al mercado una película de vídeo. Calcula invertir en publicidad una cantidad que, en euros, viene dada por la función $f(x) = 64x + \dfrac{25}{x}$, donde x representa, en miles de unidades, el número de cintas que hay en el mercado.

a) ¿Qué número de cintas de vídeo corresponde a la mínima inversión publicitaria? ¿A cuánto asciende esta inversión?

b) ¿Cuál es la tendencia del gasto publicitario según aumenta el número de películas en el mercado?

4. Representa la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

5. Representa la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$.

6. Representa la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIONES

1. a) $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$x = 2$ es la única asíntota vertical.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.

La función no puede tener asíntotas oblicuas, pues tiene una asíntota horizontal.

Ninguna asíntota corta la gráfica de la función.

b) $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x = 1$ es la única asíntota vertical.

La función no tiene asíntotas horizontales.

Como $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = -3$, la recta $y = x - 3$ es una asíntota oblicua.

Ninguna asíntota corta la gráfica de la función.

2. a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) Sí, pues $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = -1$

c) No, pues $f'(1)^- = 2 \neq f'(1)^+ = -1$

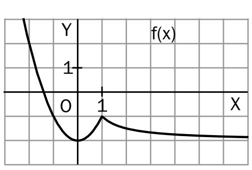
d) $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f es creciente en $(0, 1)$; es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$.

e) El punto $(0, -2)$ es un mínimo.

f) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -2 \Rightarrow y = -2$ es asíntota horizontal.

g)



3. a) $f'(x) = 64 - \dfrac{25}{x^2}$ siendo $x > 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{25}{64} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{8}$

$f''(x) = \dfrac{50}{x^3}$; por tanto, $f''\left(\dfrac{5}{8}\right) > 0$

f tiene un mínimo en $\left(\dfrac{5}{8}, f\left(\dfrac{5}{8}\right)\right) = (0{,}6; 80)$; así, si la empresa lanza 600 películas al mercado, la inversión publicitaria es mínima y asciende a 80 euros.

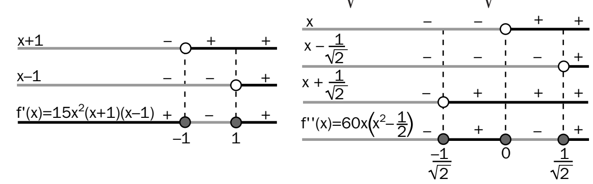
b) Como f tiene una asíntota oblicua en $y = 64x$, la empresa tiende a gastar 0,064 euros por película.

4. $D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$, $f''(x) = 60x^3 - 30x$

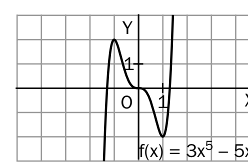
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = -1$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$; decreciente en el intervalo $(-1, 1)$. Máximo: $(-1, 2)$. Mínimo: $(1, 2)$.

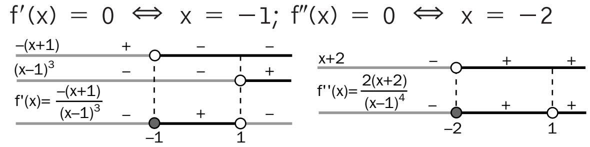
Cóncava en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; convexa en $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$. Puntos de inflexión: $(0, 0)$, $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{7}{4\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-7}{4\sqrt{2}}\right)$



5. $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; $x = 1$ asíntota vertical.

$f'(x) = \dfrac{-(x + 1)}{(x - 1)^3}$; $f''(x) = \dfrac{2(x + 2)}{(x - 1)^4}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

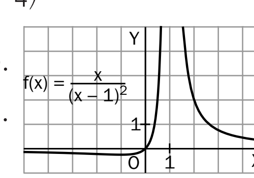


Decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$; creciente en $(-1, 1)$. Mínimo en $\left(-1, -\dfrac{1}{4}\right)$.

Cóncava en $(-\infty, -2)$; convexa en $(-2, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Punto de inflexión $\left(-2, -\dfrac{2}{9}\right)$.

Asíntota horizontal: $y = 0$.



6. $D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $f''(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} > 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

Mínimo en $(0, 1)$.

Siempre convexa.

$y = x$ e $y = -x$ asíntotas oblicuas.