ediciones sm

Monotonía y curvatura

1. Halla el área del triángulo que forman los ejes coordenados y la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2$ en su punto de inflexión.

2. Considera la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ y determina:

a) El dominio.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos.

c) Los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad.

3. Sebastián fabrica bloques de turrón que vende a un precio proporcional al cuadrado del peso. Un bloque de 1 kilo cuesta 12 euros.

a) Si un bloque de 1 kilo lo parte en dos trozos, uno de 300 gramos y otro de 700 gramos, ¿a cuánto vende cada trozo?

b) Demuestra que siempre que parta un bloque de 1 kilo en dos trozos, sean del peso que sean, ganará menos dinero que vendiéndolo entero.

c) Calcula cuál será la partición en dos trozos con la que obtendría el mínimo beneficio al vender un bloque de 1 kilo de turrón.

4. Un fabricante de zumos de frutas quiere comercializarlos en envases prismáticos de cartón con base cuadrada y cuya capacidad sea de 1 litro. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del envase para que el gasto de cartón sea mínimo?

5. Los alumnos de un centro escolar quieren organizar una excursión. La agencia de viajes a la que han acudido cobra un precio de 110 euros por alumno, ofertando un descuento individual de 1 euro por cada alumno que se apunte. Halla el número de alumnos que deben ir de excursión para que, con esa oferta, los beneficios de la empresa sean máximos.

6. La relación entre los beneficios, en miles de euros, obtenidos por la venta de un determinado producto y el tiempo en años que está en el mercado viene dada por la función $B(t) = \dfrac{100t}{t^2 + 81}$.

a) Estudia los períodos en los que los beneficios crecen y en los que decrecen.

b) Indica el número de años que debe estar el producto en el mercado para que el beneficio sea máximo.

c) ¿Hay algún momento en que la venta de este producto produzca pérdidas?

SOLUCIONES

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'' = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

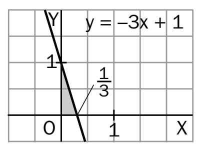
Si $x < 1 \Rightarrow f''(x) < 0$; si $x > 1 \Rightarrow f''(x) > 0$

El punto de inflexión es $(1, -2)$ y la recta tangente a la curva en él, $y + 2 = -3(x-1)$.

La recta corta los ejes en $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ y $(0, 1)$.

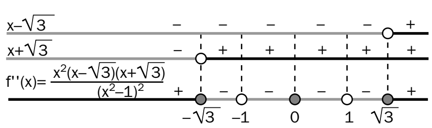
El área del triángulo es

$A = \frac{1}{6}$ unidades de medida.



2. a) $D(f) = R - \{-1, 1\}$

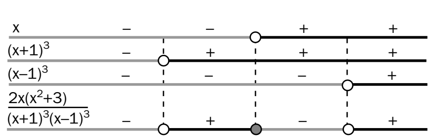
b) $f'(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 - 1)^2}$



f es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$; f es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \sqrt{3})$.

$\left(-\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ máximo; $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ mínimo.

c) $f''(x) = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = \dfrac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$, que se anula sólo para $x = 0$.



f es cóncava en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$; f es convexa en $(-1, 0)$ y $(1, +\infty)$. $(0, 0)$ punto de inflexión.

3. La función que indica el precio en euros para un trozo de turrón que pese x kg es: $P(x) = 12x^2$

a) $P(0,3) = 1{,}08$ euros; $P(0,7) = 5{,}88$ euros

b) Sean los pesos de los trozos en kg, x y $(1 - x)$. Nótese que $0 < x < 1$. La función que expresa el dinero que Sebastián obtendrá por la venta de esos trozos es:

$f(x) = P(x) + P(1-x) = 12x^2 + 12(1+x^2 - 2x) =$
$= 24x^2 - 24x + 12$, que para $0 < x < 1$ es menor que 12.

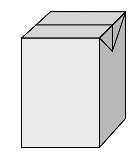
c) $f'(x) = 48x - 24$; $f''(x) = -24$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$, que es mínimo, pues $f''(0{,}5) < 0$

Solución: Obtendrá el mínimo beneficio si divide el bloque en dos trozos de 500 gramos.

4. Sean x y h las longitudes en cm del lado de la base y de la altura, respectivamente.

El volumen es $V = x^2\,h$ cm³.



$x^2\,h = 1\,000 \Rightarrow h = \dfrac{1\,000}{x^2}$

La superficie de cartón es:

$S(x) = 2x^2 + 4x \cdot \dfrac{1\,000}{x^2}\ \text{cm}^2 = \dfrac{2x^3 + 4\,000}{x}\ \text{cm}^2$

$S'(x) = \dfrac{4x^3 - 4\,000}{x^2}$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$

$S''(x) = \dfrac{4x^3 + 8\,000}{x^3} \Rightarrow S''(10) > 0$

por tanto, para $x = 10$ se obtiene el mínimo.

El lado de la base y la altura miden 10 cm, luego el envase debe ser un cubo de 10 cm de arista.

5. Si x representa el número de alumnos que van a la excursión, el precio total a pagar es:

$P(x) = x(110 - 1x)$ euros

$P'(x) = 110 - 2x$; $P''(x) = -2$

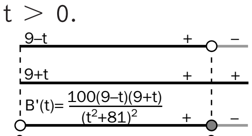
$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 55$, que es mínimo, pues $P''(55) < 0$

Solución: Deben ir de excursión 55 alumnos.

6. Hay que tener en cuenta que $t > 0$.

a) $B'(t) = \dfrac{100(9 - t)(9 + t)}{(t^2 + 81)^2}$

$B'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 9$



B crece en $(0, 9)$ y decrece en $(9, +\infty)$.

b) B alcanza el máximo para $t = 9$, pues pasa de creciente a decreciente.

c) No, ya que $B(t)$ es siempre positiva; si bien a largo plazo los beneficios serán prácticamente nulos, pues $\lim_{t \to +\infty} B(t) = 0$.