

**Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss**

1. Discute los siguientes sistemas y resuelve los que sean compatibles determinados:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

2. En unos grandes almacenes un señor compra 2 trajes de chaqueta, 1 cazadora y 2 pantalones. Paga 530 euros. En la caja contigua, otra persona está pagando 840 euros por 3 trajes de chaqueta, 3 cazadoras y unos pantalones. Al día siguiente hay una oferta en la que se hace un 10 % de descuento, y un chico ha pagado 225 euros por un traje de chaqueta y una cazadora. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

3. Una ecuación lineal con dos incógnitas de la forma  $ax + by + c = 0$  es la expresión de una recta en el plano. Según esto, las rectas del plano expresadas por las ecuaciones de los siguientes sistemas, ¿serán paralelas, secantes o coincidentes?

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ -6x + 3y - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x - 7y + 2 = 0 \\ 10x - 14y - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x - 7y - 4 = 0 \end{cases}$$

4. Dadas las ecuaciones:

$$x + y - 2z = 0$$

$$x - 2y + z = 0$$

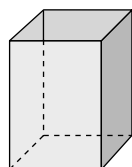
Escribe una tercera ecuación para que el sistema resultante sea incompatible.

5. Si se mezclan  $x$  partes de aceite de oliva virgen con  $y$  partes de aceite de oliva refinado ( $y \neq x$ ), la mezcla resultante tiene un precio de  $A$  euros el litro. Si se mezclan  $y$  partes de aceite de oliva virgen y  $x$  partes de refinado, el precio del litro de la mezcla es de  $B$  euros.

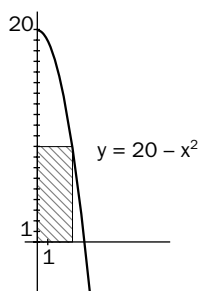
a) Halla el valor del litro de aceite de cada clase.

b) Si  $A = B$ , ¿qué se puede decir de los precios de los dos tipos de aceite?

6. Se quiere construir un depósito de  $32 \text{ m}^3$ , con forma de prisma cuadrangular, excavado en la tierra y sin cubrir. Si la superficie de la base y de las caras laterales debe ser de  $68 \text{ m}^2$ , calcula las dimensiones del lado de la base y de la altura.



7. Observa la figura adjunta. Se quiere construir un rectángulo en el primer cuadrante, limitado por los ejes de coordenadas y la gráfica de  $y = 20 - x^2$ . Calcula las dimensiones del rectángulo, si su área tiene que ser de 16 unidades cuadradas.



# SOLUCIONES

$$1. a) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones; por tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado.

$$b) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y - 4z = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y - 4z = 3 \\ 2z = -2 \end{cases}$$

Sistema compatible determinado.

Solución:  $z = -1$ ;  $y = -1$ ;  $x = 6$ .

2. Sean  $x$ ,  $y$ ,  $z$  los precios en euros del traje de chaqueta, la cazadora y los pantalones, respectivamente.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 530 \\ 3x + 3y + z = 840 \\ 0,9x + 0,9y = 225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 530 \\ 3x + 3y + z = 840 \\ 9x + 9y = 2250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 530 \\ 3y - 4z = 90 \\ 9y - 18z = -270 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 530 & z = 90 \\ 3y - 4z = 90 & \Rightarrow y = 150 \\ -6z = -540 & x = 100 \end{cases}$$

Solución: Los precios del traje de chaqueta, la cazadora y los pantalones son 100, 150 y 90 euros, respectivamente.

$$3. a) \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ -6x + 3y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y + 15 = 0 \\ -6x + 3y - 15 = 0 \end{cases}$$

Sistema compatible indeterminado. Las rectas son **coincidentes**, pues tienen en común infinitos puntos.

$$b) \begin{cases} 5x - 7y + 2 = 0 \\ 10x - 14y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 7y + 2 = 0 \\ -22 = 0 \end{cases}$$

Sistema incompatible. Las rectas no tienen ningún punto común, luego son **paralelas**.

$$c) \begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x - 7y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ -3y + 6 = 0 \end{cases}$$

Sistema compatible determinado. Las rectas tienen un único punto en común; son **secantes**.

$$4. \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$y = z; x = -y + 2z = -z + 2z = z$$

Las soluciones del sistema formado son de la forma:  $x = y = z$ . Para obtener un sistema incompatible se añade una ecuación en la que  $x = y = z$  no sea solución; por ejemplo:

$$x - 2y + z = 5 \text{ (si } x = y = z, x - 2y + z = 0)$$

5. Sean  $v$  y  $r$  los precios del litro de aceite de oliva virgen y refinado, respectivamente.

$$a) \begin{cases} x v + y r = (x + y)A \\ x r + y v = (x + y)B \end{cases}$$

Restando a la 1.<sup>a</sup> multiplicada por  $x$ , la 2.<sup>a</sup> por  $y$ :

$$(x^2 - y^2)v = (x + y)(xA - yB) \Rightarrow (x + y)(x - y)v = (x + y)(xA - yB) \Rightarrow v = \frac{xA - yB}{x - y}, \text{ pues } x - y \neq 0$$

Restando a la 1.<sup>a</sup> multiplicada por  $y$ , la 2.<sup>a</sup> por  $x$ :

$$(y^2 - x^2)r = (x + y)(yA - xB) \Rightarrow (y + x)(y - x)r = (x + y)(yA - xB) \Rightarrow r = \frac{yA - xB}{y - x}, \text{ pues } y - x \neq 0$$

Solución: El litro de aceite de oliva virgen cuesta

$$v = \frac{xA - yB}{x - y} \text{ euros y el de aceite de oliva refinado } r = \frac{yA - xB}{y - x} \text{ euros.}$$

- b) Si  $A = B$ , los precios de ambos tipos coinciden.

6. Sean  $x$  e  $y$  las medidas en metros del lado de la base y de la altura, respectivamente.

Volumen:  $x^2y$ ; Superficie de la base:  $x^2$

Superficie de las caras laterales:  $4xy$

$$\begin{cases} x^2y = 32 \\ x^2 + 4xy = 68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{32}{x^2} \\ x^2 + \frac{4 \cdot 32}{x} = 68 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^3 - 68x + 128 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x - 64) = 0$$

Soluciones del sistema:

$$x = 2, x = -1 + \sqrt{65} = 7,06, x = -1 - \sqrt{65} = -9,06$$

La última solución no es válida como medida del lado de un cuadrado. Así pues, hay dos soluciones: base 2 m y altura 8 m o base 7,06 m y altura 0,64 m.

7.  $16 = xy = x(20 - x^2) \Leftrightarrow x^3 - 20x + 16 = 0$

Un solución de la ecuación es:  $x = 4$

Factorizando:  $(x - 4)(x^2 + 4x - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 4, x = -2 \pm 2\sqrt{2}$ ; la negativa no puede representar una longitud.

Se obtienen dos posibles rectángulos:

$$x = 4, y = 4$$

$$x = -2 + 2\sqrt{2} = 0,8284, y = 19,31$$

