ediciones sm

Tendencia y continuidad

1. Considera la sucesión $a_n = \dfrac{1}{2n^2}$. Completa la tabla e indica a qué valor se aproximan sus términos:

n	1	2	3	10	100	1 000	10 000
a_n	0,5	0,125					

2. Halla el valor al que se aproximan los términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \sqrt{n^2 + 1}$ b) $a_n = \dfrac{2n + 3}{n - 1}$ c) $a_n = \dfrac{4}{1 - n^2}$

3. Calcula el límite de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

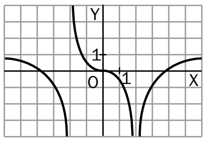
a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 1)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}{x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x^2 + x)$ d) $\lim\limits_{x \to 8} (\sqrt{x + 1} - x)$ f) $\lim\limits_{x \to 2} 2^{x^2+1}$

4. A la vista de la gráfica, señala el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

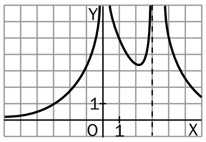
b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$



5. A la vista de la gráfica, señala el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$



6. Calcula los siguiente límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x + 3)$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^3 - 2x^2 + x - 1)$

7. Calcula el límite de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 2}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 6}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 2x}{x}$ d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{\sqrt{x + 20} - 5}$

8. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 4}{2x^2 + 1}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^5 + 4x}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 + 3x} - x$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + 3x^2}{2x^3 - 5}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$

9. Estudia la continuidad en $x = 2$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 5 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 4 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. Los términos de la sucesión a_n tienden a 0.

n	1	2	3	10	100	1 000	10 000
a_n	0,5	0,125	0,0$\widehat{5}$	0,005	0,00005	0,0000005	0,000000005

2. a) $\lim \sqrt{n^2 + 1} = \sqrt{+\infty + 1} = +\infty$

b) $\lim \dfrac{2n + 3}{n - 1} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim \dfrac{2 + \frac{3}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = \dfrac{2 + 0}{1 - 0} = 2$

c) $\lim \dfrac{4}{1 - n^2} = \dfrac{4}{1 - \infty} = \dfrac{4}{-\infty} = 0$

3. a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 3x + 1) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$

b) $\lim\limits_{x\to -1} (x^3 - x^2 + x) = -3$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -1$

d) $\lim\limits_{x\to 8} (\sqrt{x + 1} - x) = -5$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}{x + 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} 2^{x^2+1} = 2^5 = 32$

4. a) 1 b) $-\infty$ c) 1 d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) 0

5. a) 0 b) 5 c) 0 d) $+\infty$ e) 5 f) $+\infty$

6. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 - 5) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 - x + 3) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} (3x^3 - 3x^2 + x - 1) = +\infty$

7. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x + 3}{x - 2} = -4$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 - 2x}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} 3x - 2 = -2$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + 2}{x^2} = \dfrac{2}{0}$

Operación no válida en $\mathbb{R}$. La indeterminación se resuelve calculando los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x + 2}{x^2} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x + 2}{x^2} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

Coinciden, por tanto $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + 2}{x^2} = +\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x - 5}{\sqrt{x + 20} - 5} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(x - 5)(\sqrt{x + 20} + 5)}{(\sqrt{x + 20} - 5)(\sqrt{x + 20} + 5)} =$

$= \lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x + 20} + 5 = \sqrt{25} + 5 = 10$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 6} = \dfrac{0}{-4} = 0$

8. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 4}{2x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4 + 3x^2}{2x^3 - 5} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x + \frac{3}{x}}{2 - \frac{5}{x^3}} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^5 + 4x} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4} - \frac{1}{x^5}}{1 + \frac{4}{x^4}} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \infty - \infty =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \dfrac{2}{+\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x^2 + 3x} - x = \infty - \infty =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\sqrt{2x^2 + 3x} - x)(\sqrt{2x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{2x^2 + 3x} + x} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x}{\sqrt{2x^2 + 3x} + x} = \dfrac{\infty}{\infty} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x + 3}{\sqrt{2 + \frac{3}{x}} + 1} = \dfrac{+\infty}{\sqrt{2} + 1} = +\infty$

9. a) En $x = 2$ la función no está definida, f no es ni continua ni discontinua en $x = 2$.

b) $f(2) = 5$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 2} (x + 2) = 4$

Discontinua pues $f(2) = 5 \neq \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

c) $f(2) = 4$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 2} (x + 2) = 4$

Continua pues $f(2) = 4 = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$.