ediciones sm

Tasas de variación y derivadas

1. Calcula la tasa de variación de la función $f(x) = 3x - 4$ en el intervalo $[0, 4]$.

2. Calcula la tasa de variación de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en el intervalo $[2, 5]$.

3. Calcula la tasa de variación de la función $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2}$ en el intervalo $[1, 3]$.

4. Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 + x - 5$ en el intervalo $[-1, 3]$.

5. Halla la derivada de la función $f(x) = 4x - 1$ en el punto $x = 2$ utilizando la definición.

6. Dada la función $f(x) = x^2 + 1$, halla $f'(3)$ utilizando la definición.

7. Halla la derivada de la función $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ en el punto $x = 0$ utilizando la definición.

8. Halla, aplicando la definición, la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = x^2 + 3$

c) $f(x) = 3x^2 + 4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

e) $f(x) = 2x^3$

f) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

9. ¿Para qué valor de x la derivada de la función $y = 2x^2 - x$ vale 3?

10. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

11. Halla el punto de la curva $y = 2x^2 + 1$ en el que la recta tangente tiene pendiente $m = 8$.

12. La tabla muestra la evolución de la población mundial entre 1920 y 1980.

Año	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980
N.º de habitantes (en millones)	1 810	2 015	2 250	2 515	3 020	3 690	4 450

a) ¿Cuál ha sido el crecimiento de la población en el período 1920-1980?

b) ¿Cuál ha sido el crecimiento de la población en el período 1970-1980?

c) ¿Cuál ha sido el crecimiento medio de la población en el período 1920-1980?

d) ¿Cuál ha sido el crecimiento medio de la población en el período 1970-1980?

e) El crecimiento relativo de la población (TVM), ¿fue mayor entre 1920 y 1980 o entre 1970 y 1980?

SOLUCIONES

1. $TV[0, 4] = f(4) - f(0) = 8 - (-4) = 12$

2. $TV[2, 5] = f(5) - f(2) = 32 - 5 = 27$

3. $TV[1, 3] = f(3) - f(1) = \frac{7}{9} - 3 = -\frac{20}{9}$

4. $TVM[-1, 3] = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{7 + 5}{4} = 3$

5. $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{4(2 + h) - 1 - 7}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h}{h} = \lim_{h\to 0} 4 = 4$

6. $f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(3 + h)^2 + 1 - 10}{h} = \lim_{h\to 0} 6 + h = 6$

7. $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2h^2 + 3h - 2 - (-2)}{h} = \lim_{h\to 0} 2h + 3 = 3$

8. a) $D\,(3x - 1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{3(x + h) - 1 - (3x - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = 3$

b) $D\,(x^2 + 3) = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$

c) $D\,(3x^2 + 4) = \lim_{h\to 0} 6x + 3h = 6x$

d) $D\left(\frac{1}{x + 1}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x + 1)\,(x + h + 1)} = \frac{-1}{(x + 1)^2}$

e) $D\,(2x^3) = \lim_{h\to 0} 6x^2 + 6xh + 2h^2 = 6x^2$

f) $D\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{(x + 1)\,(x + h + 1)} = \frac{2}{(x + 1)^2}$

9. Utilizando las tablas de derivadas se obtiene que la derivada de $y = f(x) = 2x^2 - x$ es:

$y' = 4x - 1$

$y' = 3 \iff 4x - 1 = 3 \iff x = 1$

10. La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)\,(x - 2)$.

$f(2) = 2^2 = 4$; $y' = f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$

$y - 2 = 4(x - 2)$ de donde $4x - y - 6 = 0$

11. Que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x) = 2x^2 + 1$ en el punto buscado sea igual a 8, significa que en la abscisa de ese punto la derivada $y' = f'(x)$ vale 8.

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2 + 4xh}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} 2h + 4x = 4x$

Se tiene: $4x = 8 \Rightarrow x = 2$.

El punto buscado tiene de abscisa $x = 2$, por tanto es $(2, f(2))$, es decir $(2, 9)$.

12. a) El crecimiento es la diferencia entre la población en 1980 y la que había en 1920.

$f(1980) - f(1920) = 2\,640$ millones de habitantes.

b) La población en el período 1970-1980 aumentó en $f(1980) - f(1970) = 760$ millones de habitantes.

c) El crecimiento medio de la población en un período corresponde a la tasa de variación media en dicho período, por tanto:

$TVM[1920, 1980] = \frac{f(1980) - f(1920)}{1980 - 1920} =$

$= \frac{2\,640}{60} = 44$ millones de habitantes/año.

d) $TVM[1970, 1980] = \frac{f(1980) - f(1970)}{1980 - 1970} =$

$= \frac{760}{10} = 76$ millones de habitantes/año.

e) Comparando las TVM en ambos períodos, se concluye que el crecimiento relativo de la población fue mayor en el período 1970-1980.