ediciones sm

Cálculo de tasas de variación y derivadas

1. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\,(x^3 - 5x^2 + 4x - 1)$

b) $D\,(6x^4 - 2x^3 + 5x + 8)$

c) $D\,(7x^5 - 3x^4)$

d) $D\,(5x^3 - 2x^2 + x)$

2. Calcula las siguientes derivadas realizando previamente las operaciones entre polinomios:

a) $D\,(x^3 + 1)\,(x^2 - 3)$ b) $D\,(x + 1)^2$ c) $D\,(3x^5 - 7)\,(2x + 1)$

3. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\sqrt[5]{x^4}$ b) $D\,(x\sqrt{x})$ c) $D\,\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

Es preferible pasar antes las raíces a forma potencial.

4. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\left(\dfrac{x^2 + 1}{x - 1}\right)$

b) $D\left(\dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}\right)$

c) $D\left(\dfrac{7}{x + 5}\right)$

d) $D\left(\dfrac{-x}{x + 2}\right)$

5. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\,(\sqrt{x} + \cos x)$

b) $D\,(x^2 \operatorname{sen} x)$

c) $D\,(\operatorname{sen} x \cos x)$

d) $D \operatorname{tg} x$

e) $D\,(x^3 \cos x)$

f) $D\,(7^x \cdot x^2)$

g) $D\,(e^x \cdot 3x^2)$

h) $D\left(\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}\right)$

6. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\,(x^3 + 3x)^2$ b) $D\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)^2$

7. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\,[\operatorname{sen}\,(x^2 + 4x)]$

b) $D\,(\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x)$

c) $D\,e^{5x}$

d) $D\,L(7x^2)$

e) $D\sqrt{\operatorname{sen} x}$

f) $D\,L\sqrt{x^2 + 3}$

g) $D\,5^{2x-8}$

h) $D\,[\cos\,(7^x + 4x)]$

8. Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y = \sqrt{2x}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

b) $y = x^2 - 3x + 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

9. Se sabe que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $P(1, 0)$ y que $f'(1) = 1$ y $f'(2) = 5$. Calcula a, b y c.

10. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ en el punto de abscisa $x = 2$. ¿Se puede hallar la recta tangente en $x = 1$? Razónalo.

SOLUCIONES

1. Aplicando las reglas de derivación:

a) $D(x^3 - 5x^2 + 4x - 1) = 3x^2 - 10x + 4$

b) $D(6x^4 - 2x^3 + 5x + 8) = 24x^3 - 6x^2 + 5$

c) $D(7x^5 - 3x^4) = 35x^4 - 12x^3$

d) $D(5x^3 - 2x^2 + x) = 15x^2 - 4x + 1$

2. a) $D(x^5 - 3x^3 + x^2 - 3) = 5x^4 - 9x^2 + 2x$

b) $D(x + 1)^2 = D(x^2 + 2x + 1) = 2x + 2$

c) $D(6x^6 + 3x^5 - 14x - 7) = 36x^5 + 15x^4 - 14$

3. a) $D\sqrt[5]{x^4} = D(x^{\frac{4}{5}}) = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$

b) $D(x\sqrt{x}) = (x^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

c) $D\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} = D(x^{1-\frac{2}{3}}) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

4. a) $D\left(\frac{x^2 + 1}{x - 1}\right) = \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 1)\cdot 1}{(x - 1)^2} =$

$= \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$

b) $D\left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}\right) = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

c) $D\left(\frac{7}{x + 5}\right) = 7\,D\left(\frac{1}{x + 5}\right) = -\frac{7}{(x + 5)^2}$

d) $D\left(\frac{-x}{x + 2}\right) = \frac{-2}{(x + 2)^2}$

5. a) $D(\sqrt{x} + \cos x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \text{sen}\, x$

b) $D(x^2 \,\text{sen}\, x) = 2x\,\text{sen}\, x + x^2 \cos x$

c) $D(\text{sen}\, x \cos x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

d) $D\,\text{tg}\, x = 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

e) $D(x^3 \cos x) = 3x^2 \cos x - x^3 \,\text{sen}\, x$

f) $D(7^x \cdot x^2) = x^2 \cdot 7^x \cdot L7 + 7^x 2x$

g) $D(e^x \cdot 3x^2) = e^x \cdot 3x^2 + e^x \cdot 6x = 3xe^x(x + 2)$

h) $D\left(\frac{x + \text{sen}\, x}{x + \cos x}\right) =$

$= \frac{1 + (1 + x)\cos x + (x - 1)\,\text{sen}\, x}{(x + \cos x)^2}$

6. a) $D(x^3 + 3x)^2 = 2(x^3 + 3x)(3x^2 + 3)$

b) $D\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^2 = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^3}$

7. a) $D(\text{sen}\,(x^2 + 4x)) = \cos(x^2 + 4x)\cdot(2x + 4) =$

$= (2x + 4)\cos(x^2 + 4x)$

b) $D[\text{sen}^2 x \cos^2 x] = 2\,\text{sen}\, x \cos x \cos^2 x +$

$+ \text{sen}^2 x\,(2\cos x\,(-\text{sen}\, x)) =$

$= 2\,\text{sen}\, x \cos^3 x - 2\cos x\,\text{sen}^3 x$

c) $D\,e^{5x} = 5e^{5x}$

d) $D\,L(7x^2) = D(L7 + Lx^2) = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x}$

e) $D\sqrt{\text{sen}\, x} = \frac{1}{2\sqrt{\text{sen}\, x}}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen}\, x}}$

f) $D\,L\sqrt{x^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}}\cdot 2x = \frac{x}{x^2 + 3}$

g) $D\,5^{2x-8} = 5^{2x-8}\cdot L5\cdot 2 = 2L5\cdot 5^{2x-8}$

h) $D[\cos(7^x + 4x)] = -(7^x\cdot L7 + 4)\,\text{sen}\,(7^x + 4x)$

8. a) La recta tangente buscada es:

$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$f(2) = 2;\ y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$

$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x - 2y + 2 = 0$

b) La recta tangente buscada es:

$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$f(1) = -1;\ y' = f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(1) = -1$

$y + 1 = -1(x - 1)$ de donde $x + y = 0$

9. Como pasa por (1, 0) se tiene que $a + b + c = 0$.

$f'(x) = 2ax + b$, por tanto:
$f'(1) = 2a + b = 1$, $f'(2) = 4a + b = 5$

$$\left\{\begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ 2a + b = 1 \\ 4a + b = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{array}$$

10. a) La recta tangente buscada es:

$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$f(2) = 3;\ y' = f'(x) = \frac{-2}{(x - 1)^2} \Rightarrow f'(2) = -2$

$y - 3 = -2(x - 2)$ de donde $2x + y - 7 = 0$

b) No, puesto que para $x = 1$ no existe la curva.