ediciones sm

Monotonía y curvatura

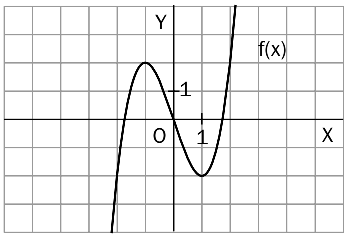
1. A la vista de la gráfica de la función f, determina:

a) Los máximos y mínimos de la función.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Los puntos de inflexión.

d) Los intervalos de concavidad y convexidad.



2. Calcula los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 12x$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ c) $f(x) = L(x + 1)$

3. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4 - x^2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

4. Calcula los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

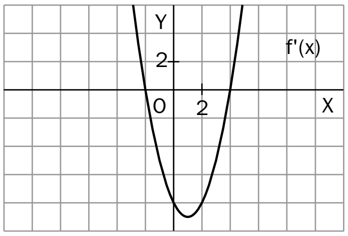
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ b) $f(x) = x^4 - 6x^2$ c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

5. Estudia los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 6$ b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ c) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

6. Dada la función $f(x) = x^2 + bx + c$, halla b y c para que f tenga un mínimo en $(2, -9)$.

7. La gráfica representa la función derivada de una función f.



Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función f.

8. Considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ y calcula:

a) Su dominio.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Los máximos y los mínimos.

d) Los puntos de inflexión.

e) Los intervalos de concavidad y convexidad.

9. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 9$ en su punto de inflexión.

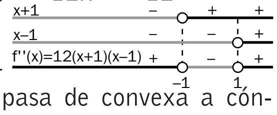
SOLUCIONES

1. a) $(-1, 2)$ es un máximo y $(1, -2)$ es un mínimo.
b) La función es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$; es decreciente en $(-1, 1)$.
c) $(0, 0)$, pues f pasa de cóncava a convexa.
d) Convexa en $(0, +\infty)$ y cóncava en $(-\infty, 0)$.

2. a) $f'(x) = 3x^2 - 12$; $f'(x) = 0 \iff x = \pm 2$
$f''(x) = 6x$
$f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow (-2, 16)$ es máximo.
$f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow (2, -16)$ es mínimo.
b) Derivada primera: $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$
$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$
$f''(x) = \dfrac{-6x}{(x^2 + 1)^2}$
$f''(-1) = \dfrac{6}{4} > 0 \Rightarrow \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ es mínimo.
$f''(1) = -\dfrac{6}{4} < 0 \Rightarrow \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ es máximo.
c) $f'(x) = \dfrac{1}{x + 1} \neq 0$. La función no tiene extremos.

3. a) $D(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = -2x \Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = 0$
f es creciente en $(-\infty, 0)$ y es decreciente en $(0, +\infty)$. En $x = 0$ no puede afirmarse nada.
b) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
$f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = 0$
El signo de la primera derivada coincide con el signo del numerador $(-2x)$.
f es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$; es decreciente en $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$. En $x = \pm 1$ no puede afirmarse nada.

4. a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$
$f''(x) = 0 \iff x = 1$
En $x = 1$ la función pasa de cóncava a convexa, luego $(1, 4)$ es punto de inflexión.
b) $f'(x) = 4x^3 - 12x$, $f''(x) = 12x^2 - 12 =$
$= 12(x + 1)(x - 1)$
$f''(x) = 0 \iff x = \pm 1$



En $x = -1$ la función pasa de convexa a cóncava, luego $(-1, -5)$ es punto de inflexión.
En $x = 1$ la función pasa de cóncava a convexa, luego $(1, -5)$ es punto de inflexión.
c) $f'(x) = -\dfrac{8x}{(x^2 - 4)^2}$, $f''(x) = \dfrac{24x^2 + 32}{(x^2 - 4)^3}$
$f''(x) = 0 \iff 24x^2 + 32 = 0$. Esto no sucede nunca, la función no tiene puntos de inflexión.

5. a) $D(f) = \mathbb{R}$
$f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ f es siempre convexa.
b) $D(f) = \mathbb{R}$
$f'(x) = 3x^2 + 4x$, $f''(x) = 6x + 4 = 6\left(x + \dfrac{2}{3}\right)$
f es cóncava en $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right)$; convexa en $\left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.
El punto $\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{-119}{27}\right)$ es de inflexión.
c) $D(f) = [-1, +\infty)$
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{4(\sqrt{x+1})^3} < 0$
en todo su dominio; f es cóncava en $[-1, +\infty)$.

6. $\left.\begin{array}{l} f(2) = -9 \\ f'(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4 + 2b + c = -9 \\ 4 + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b = -4 \\ c = -5 \end{array}$

7. Si $x < -2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2)$.
Si $-2 < x < 4$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-2, 4)$.
Si $x > 4$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(4, +\infty)$.
En el punto de abscisa $x = -2$, f alcanza un máximo, pues en él f pasa de creciente a decreciente, y en el de abscisa $x = 4$, f alcanza un mínimo, pues en este punto f pasa de decreciente a creciente.

8. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
b) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{x^2}$
$f'(x) = 0 \iff (x - 1)(x + 1) = 0 \iff x = \pm 1$
f es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$; es decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.
c) En $(-1, -2)$ la función alcanza un máximo.
En $(1, 2)$ alcanza un mínimo.
d) $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} \neq 0$; f no tiene puntos de inflexión.
e) Si $x < 0$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava en $(-\infty, 0)$.
Si $x > 0$, $f''(x) > 0$ y $\Rightarrow$ f es convexa en $(0, +\infty)$.

9. $D(f) = \mathbb{R}$
$f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$
$f''(x) = 0 \iff x = 2$
El punto de abscisa $x = 2$ es de inflexión pues en él f pasa de cóncava a convexa.
Recta tangente $y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow$
$y + 7 = -12(x - 2) \Rightarrow 12x + y - 17 = 0$