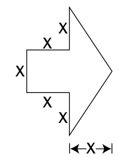
ACTIVIDADES DE SÍNTESIS

1. Halla el área de la figura en función de x. Calcula el área cuando $x = 5$ cm.



2. Calcula con 1 error menor de 1 cm la longitud del diámetro de una circunferencia de 7 m de longitud.

3. Resuelve:

a) $7 - \dfrac{x + 4}{3} + \dfrac{x}{3} = \dfrac{5x - 8}{27} - \dfrac{5(x - 11)}{9}$

b) $\left(3x - \dfrac{2}{3}\right) \cdot \left(3x + \dfrac{2}{3}\right) - 4 = (3x - 5)^2 + \dfrac{5}{9}$

4. La suma de las tres cifras de un número es 10. La diferencia entre este número y el que resulta al invertir el orden de sus cifras es 198, y la cifra de las decenas es la cuarta parte de la suma de las otras dos. Halla el número pedido.

5. Considera las funciones $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ y $g(x) = x^2 + 1$.

a) Halla los dominios de f y de g.

b) Calcula $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$, $g(7)$

c) Calcula $g(f(x))$ y $f(g(x))$.

d) Calcula la función recíproca de f.

e) Estudia las posibles simetrías de f y de g.

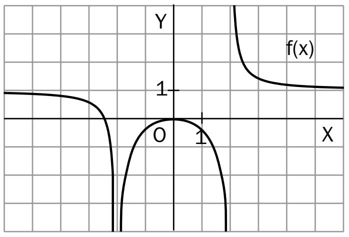
6. Considera la función $f(x) = |1 - x^2|$.

a) Escribe la expresión algebraica de la función que resulta de trasladar horizontalmente f mediante el vector $\vec{v} = (1, 0)$.

b) Escribe la expresión algebraica de la función que resulta de trasladar verticalmente f mediante el vector $\vec{w} = (0, -2)$.

c) Escribe la expresión algebraica de la función que resulta de trasladar oblicuamente f mediante el vector $\vec{u} = (-1, 1)$.

7. Considera la función cuya gráfica es:



a) ¿Cuál es su dominio?

b) ¿En qué puntos corta los ejes coordenados?

c) ¿Es simétrica par o impar?

d) ¿Cuáles son sus asíntotas?

e) Señala sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

f) Señala sus máximos y mínimos.

g) ¿Tiene puntos de inflexión?

h) Halla el límite de f cuando $x \to 0$, $x \to -2$, $x \to 2^+$, $x \to 2^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

i) Señala sus puntos de discontinuidad.

8. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = \log_3(x - 3)$.

b) $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

c) $f_3(x) = 2^{\frac{x-3}{x-1}}$

SOLUCIONES

1. La figura está formada por un cuadrado de lado x y un triángulo cuya base es 3x y su altura x, por tanto el área de la figura se obtiene sumando las áreas de cuadrado y triángulo:

Área del cuadrado $= x^2$ unidades de medida.

Área del triángulo $= \dfrac{3x \cdot x}{2} = \dfrac{3x^2}{2}$ u.m.

Área total $= x^2 + \dfrac{3x \cdot x}{2} = \dfrac{5x^2}{2}$ u.m.

Para x = 5 cm, el área es: $\dfrac{5 \cdot 5^2}{2} = \dfrac{125}{2}$ u.m. $=$

$= 62{,}5$ u.m.

2. $l = 2\pi r = d\pi$, donde l es la longitud de la circunferencia; r el radio, y d el diámetro.

$7 = d\pi \iff d = \dfrac{7}{\pi} = 2{,}228$ m

Para que el error sea menor de 1 cm, se considera hasta las milésimas.

3. a) $7 - \dfrac{x+4}{3} + \dfrac{x}{3} = \dfrac{5x-8}{27} - \dfrac{5(x-11)}{9} \iff$

$\dfrac{189 - 9x - 36 + 9x}{27} = \dfrac{5x - 8 - 15x + 165}{27} \iff$

$\iff 153 = -10x + 157 \iff x = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

b) $\left(3x - \dfrac{2}{3}\right) \cdot \left(3x + \dfrac{2}{3}\right) - 4 = (3x-5)^2 + \dfrac{5}{9} \iff$

$9x^2 - \dfrac{4}{9} - 4 = 9x^2 + 25 - 30x + \dfrac{5}{9} \iff$

$\dfrac{-4 - 36}{9} = \dfrac{225 - 270x + 5}{9} \iff$

$-40 = 230 - 270x \iff 270x = 270 \iff x = 1$

4. Sean a, b y c las cifras de las centenas, decenas y unidades, respectivamente:

$$\begin{cases} a + b + c = 10 \\ 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 198 \\ b = \dfrac{a+c}{4} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a + b + c = 10 \\ 99a - 99c = 198 \\ a - 4b + c = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a + b + c = 10 \\ a - c = 2 \\ a - 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b + 2c = 8 \\ -4b + 2c = -2 \end{cases} \Rightarrow 5b = 10 \iff$$

$b = 2;\ c = \dfrac{8-b}{2} = \dfrac{8-2}{2} = 3;$

$a = 2 + c = 2 + 3 = 5$

El número pedido es abc = 523.

5. a) $D(f) = (0, +\infty);\ D(g) = \mathbb{R}$

b) $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2;\ g(7) = 50$

c) $g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{1}{x} + 1;$

$f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

d) Cambiando variables:

$x = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^2}$

e) g es simétrica par, f no puede ser ni par ni impar puesto que está definida sólo en $(0, +\infty)$.

6. a) $g(x) = f(x-1) = |1 - (x-1)^2| = |2x - x^2|$

b) $g(x) = f(x) - 2 = |1 - x^2| - 2$

c) $g(x) = f(x+1) + 1 = |-x^2 - 2x| + 1 =$
$= |x^2 + 2x| + 1$

7. a) $Df = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

b) En $\left(-\dfrac{5}{2}, 0\right)$ y (0, 0).

c) No es simétrica.

d) Horizontal y = 1; verticales x = −2 y x = 2.

e) Decrece en $(-\infty, -2)$, en (0, 2) y en $(2, +\infty)$; crece en (−2, 0)

f) Tiene un máximo en (0, 0); no tiene mínimos.

g) No tiene puntos de inflexión.

h) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0;\ \lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\infty;\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty;$
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty;\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1;\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$

i) f es discontinua en −2 y 2.

8. a) $D(f) = (3, +\infty)$

b) $D(f) = \mathbb{R} - [-5, 5]$

c) $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$