INECUACIONES

DEFINICIÓN

A veces los enunciados que dan lugar a una expresión algebraica no dicen "es igual", sino "es mayor que" o "es menor que" o "es mayor o igual que" o "es menor o igual que". Esta expresión se llama inecuación.

Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas. Su solución es el conjunto de números reales que la satisfacen.

Ejemplos : $2\,x + 3\,y \leq 10$; $3\,x > 6$; $\frac{x}{2} + (3 - x) \leq (x - 2) + \frac{x-1}{4}$

La solución de una inecuación se puede expresar mediante **una desigualdad simple**, mediante un **intervalo o unión de intervalos** o de **forma gráfica**.

Una inecuación suele tener infinitas soluciones.

INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

1° Inecuación de primer grado

Una inecuación lineal de primer grado es aquella cuyos miembros son polinomios de primer grado. Para resolverla se aplican las mismas técnicas que para resolver ecuaciones de primer grado teniendo en cuenta las propiedades de las desigualdades:

- Si se suma o resta el mismo número a los dos miembros de una inecuación, se obtiene una inecuación equivalente.
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por un mismo número positivo, se obtiene una inecuación equivalente.
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por un mismo número negativo y se cambia el sentido de la desigualdad, se obtiene una inecuación equivalente.

Ejemplo: Resuelve la siguiente inecuación $\frac{x}{2} - (x - 3) < \frac{x-1}{4} - \frac{x-2}{6}$

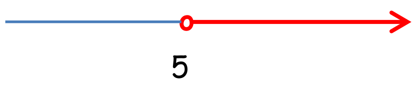
1° Se eliminan denominadores $6x - 12(x - 3) < 3(x - 1) - 2(x - 2)$

2° Se eliminan los paréntesis $6x - 12x + 36 < 3x - 3 - 2x + 4$

3° Se agrupan términos $6x - 12x - 3x + 2x < -3 + 4 - 36$

4° Se opera $-7x < -35$

5° Se resuelve $x > 5$; $(5\,,+\infty)$;



2° Inecuación de segundo grado o mayor

Para resolverlas procedemos como sigue:

- Representamos en la recta real las soluciones de la ecuación y consideramos los intervalos definidos por dichas soluciones.

- Tomamos un valor cualquiera de la incógnita en cada uno de los intervalos y probamos si verifica la inecuación.
  - Si la verifica, el intervalo es solución de la inecuación
  - Si no la verifica, el intervalo no es solución de la inecuación
- Incluimos en el conjunto solución los extremos finitos de los intervalos, es decir las soluciones de la ecuación, si la inecuación contiene los signos $\leq o \geq$.

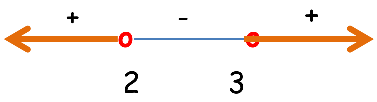
Ejemplo: Resuelve la siguiente inecuación $x^2 - 5x + 6 > 0$

1º Hallamos las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \begin{matrix} \rightarrow x = 3 \\ \rightarrow x = 2 \end{matrix}$$

2º Representamos estos valores en la recta real (en este caso abiertos, por ser >0). Tomamos un punto de cada intervalo y estudiamos el signo.

3ºLa solución está formada por los intervalos que tengan el mismo signo que el polinomio.



$$S = (-\infty\,, 2) \cup (3\,, +\infty)$$

3º Inecuaciones racionales

1º Se calculan las raíces del numerador y del denominador por separado y se representan todas sobre la misma recta real.

2ºLas raíces del **denominador** no se cogen nunca (siempre abiertos) y las del **numerador** depende de si la inecuación es **> o >** (No se cogen, abierto) o si es $\geq$ **o** $\leq$ (Se cogen, cerrado)

3º Se toman valores intermedios y si cumplen la inecuación es solución el intervalo.

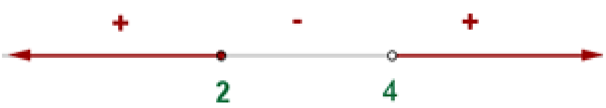
Ejemplo: Resolver $\frac{x-2}{x-4} \geq 0$

1º Hallamos las raíces del numerador y del denominador

$$\begin{matrix} x - 2 = 0 & \rightarrow & x = 2 \\ x - 4 = 0 & \rightarrow & x = 4 \end{matrix}$$

2º Representamos estos valores en la recta real, teniendo en cuenta que las raíces del denominador, independientemente del signo de la desigualdad, tienen que ser abiertas.

3º Tomamos un punto de cada intervalo y evaluamos el signo en cada intervalo.



$$S = (-\infty\,, 2) \cup (4\,, +\infty)$$

INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

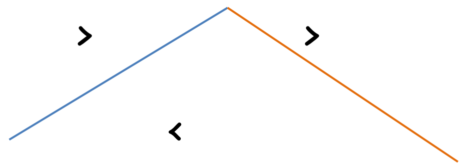
Llamamos inecuación lineal con dos incógnitas a cualquier inecuación equivalente a $ax + by < c$, $ax + by > c$, $ax + by \leq c$ o $ax + by \geq c$, donde $a, b, c \in R$.

Cada par de valores de x e y que satisface la inecuación es una solución de la inecuación.

La ecuación ax + by = c representa una recta del plano cartesiano XOY. Si se sustituye el signo de igualdad por uno de desigualdad, la expresión representa un semiplano sin borde, si el signo es estricto (> o <), o con borde, si el signo incluye la igualdad ($\geq$ o $\leq$).

Para representar estos semiplanos, se dibuja la recta tomando dos puntos cualesquiera y se comprueba si un punto exterior a ella verifica o no la inecuación.

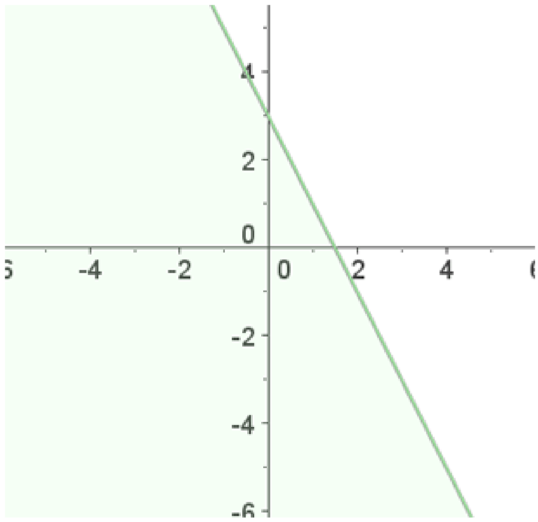
Esquema: zonas según la pendiente de las rectas



Ejemplo: Representa $2x + y \leq 3$

La inecuación representa un semiplano con borde (≤ 3).

x	y
0	3
1	1



SISTEMA DE INECUACIONES

Un sistema de inecuaciones es un conjunto de dos o más inecuaciones.

Resolver un sistema consiste en encontrar las soluciones que verifiquen todas las inecuaciones a la vez o en decir que no hay solución.

Pasos:

- Se resuelve cada inecuación por separado y se representa su solución en una recta real diferente.

- Se toma como solución la intersección de las soluciones es decir las zonas que estén cogidas en todas las rectas.

Ejemplo: Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x - y > 4 \\ 3x + 2y < 3 \end{cases}$

Resolvemos gráficamente cada una de las inecuaciones y la solución será la intersección gráfica de las distintas regiones

1º) $x - y > 4$; representaremos la recta y = x – 4 y vemos la región solución. (Figura 4)

2º) $3x + 2y < 3$; representamos la recta $y = \frac{-3x+3}{2}$ y vemos la región solución (Figura 5)

3º) La solución del sistema será la zona que cumpla las soluciones de las dos (Figura 6)