

MÉTODO DE GAUSS.- Resolución de sistemas lineales

Consiste en transformar el sistema en otro equivalente cuya matriz de coeficientes sea escalonada. Para ello "hacemos ceros" sometiendo las ecuaciones a dos transformaciones elementales:

1º **Multiplicar** una ecuación por un **número distinto de cero**

2º **Sumar** a una ecuación **otra multiplicada por un número**

El proceso se realiza cómodamente si, en lugar de las ecuaciones, utilizamos los números (coeficientes y términos independientes) estructurados en **MATRICES**.

***Al finalizar el proceso, o en algún punto intermedio, podemos encontrarnos con uno de los siguientes casos:**

A) **Una fila de ceros:** Corresponde a una ecuación trivial y prescindimos de ella.

$$(0 \ 0 \ \dots \mid 0) \leftrightarrow 0x + 0y + \dots + 0t = 0$$

B) **Dos filas iguales o proporcionales:** Corresponden a ecuaciones equivalentes y podemos prescindir inmediatamente de una de ellas:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 9 & -6 & 15 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right)$$

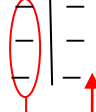
C) **Una fila de ceros, salvo el último número (término independiente):** se trata de una ecuación imposible e implica que el ST es **INCOMPATIBLE**

***Al finalizar el proceso, llegamos a los siguientes casos:**

I.- $\left(\begin{array}{cccc|c} * & - & - & - & - \\ 0 & * & - & - & - \\ 0 & 0 & * & - & - \\ 0 & 0 & 0 & * & - \end{array} \right)$ (*) = nº distinto de cero ; (-) = un nº cualquiera

Hay tantas ecuaciones como incógnitas \rightarrow **ST. COMPATIBLE DETERMINADO**

II.- $\left(\begin{array}{ccc|c} * & - & - & - \\ 0 & * & - & - \\ 0 & 0 & * & - \end{array} \right)$



Hay menos ecuaciones que incógnitas \rightarrow **ST. COMPATIBLE INDETERMINADO**

Las incógnitas que están de más se pasan al 2º miembro, con lo que el valor de las demás se da en función de ellas.

La solución vendrá dada con tantos parámetros como incógnitas hayamos pasado al 2º miembro.

III.- $\left(\begin{array}{cccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$

MÉTODO DE GAUSS.- Resolución de sistemas lineales

Una fila de ceros, salvo el último número → ST. INCOMPATIBLE

EJERCICIOS RESUELTOS

Caso 1.- Resuelve:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

Solución:

Matriz ampliada $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{Final} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ? \end{array} \right)$

Pasos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2^* = F_2 - F_1 \\ F_3^* = F_3 + F_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \text{ ST. COMPATIBLE DETERMINADO}$$

El ST. ya se puede resolver:

$$2y = 2 \rightarrow y = 1$$

$$-2y + 2z = 0 \rightarrow y = z \rightarrow z = 1$$

$$x + y - z = 1 \rightarrow x + 1 - 1 = 1 \rightarrow x = 1$$

Caso 2.- Resuelve:
$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{cases}$$

Solución:

Matriz ampliada $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & +7 & 10 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \end{array} \right)$

Pasos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2^* = F_2 - 5 \cdot F_1 \\ F_3^* = F_3 - F_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{Como la fila } 2^{\text{a}} \text{ es el doble de la } 3^{\text{a}} \\ \text{la eliminamos.} \\ \text{(filas proporcionales)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \end{array} \right) \rightarrow \text{ST. COMPATIBLE INDETERMINADO}$$
 Pasamos la 3ª columna (la z) al término independiente

$$7y = -21 + 17z \rightarrow y = \frac{-21+17z}{7} = -3 + \frac{17}{7}z$$

MÉTODO DE GAUSS.- Resolución de sistemas lineales

$$x - 3y + 7z = 10 \rightarrow x = 10 + 3y - 7z = 10 + 3(-3 + \frac{17}{7}z) - 7z = 1 + \frac{2}{7}z$$

La solución es: Si tomamos $z = 7\lambda$

$$x = 1 + 2\lambda; \quad y = -3 + 17\lambda; \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

Caso 3.- Resuelve:
$$\begin{cases} x - 3y - 2z = 7 \\ 2x - y + 15z = 3 \\ x - 8y - 21z = 11 \end{cases}$$

Matriz ampliada $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 15 & 3 \\ 1 & -8 & -21 & 11 \end{array} \right)$

Pasos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 15 & 3 \\ 1 & -8 & -21 & 11 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2^* = F_2 - 2 \cdot F_1 \\ F_3^* = F_3 - F_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & -5 & -19 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_3^* = F_3 + F_2 \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \text{ST. INCOMPATIBLE}$$