15. La función f definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que su gráfica pasa por el punto (-1, 0) y tiene un máximo relativo en el punto (0, 4).
a) Determinar la función f (calculando a, b y c).
b) Representar gráficamente la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ estudiando: intervalos de crecimiento y decrecimiento, mínimo relativo, intervalos de concavidad y convexidad y punto de inflexión.

Sol.- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ **Jun.06**

16. En un hospital el número N de personas afectadas por una cierta infección vírica, después de t semanas, viene dado por la función $N(t) = \dfrac{350\,t}{2t^2 + k\,t + 8}$ siendo $t \geq 0$
a) Se sabe que el número de personas afectadas al cabo de 1 semana ha sido 50, calcúlese el valor de k.
b) Para el valor de k = -3, calcular el máximo de personas afectadas y la semana en que ocurre, ¿a partir de qué momento, después de alcanzar el valor máximo, el número de personas afectadas es menor que 25?

Sol.- k =-3; t = 2; N = 70; t = 8; **Jun.06**

17. La cantidad de agua (en hm^3) de un embalse durante el último año viene dada por la función

$$C(t) = \frac{210000}{(2t-k)+6}\ , 0 \leq t \leq 12$$

En donde t es el tiempo transcurrido en meses.
a) Determinar el valor del parámetro k teniendo en cuenta que la cantidad máxima de agua la alcanzó al cuarto mes.
b) Para el valor de k = 8, determinar los periodos en los que la cantidad de agua ha aumentado y en los que ha disminuido. ¿A partir de qué mes la cantidad de agua ha sido inferior a 1400 hm^3?

Sol.- k = 8; crec (0, 4), decrec (4, +); 10; **Sept.06**

18. Un vendedor de pólizas de seguros tiene un sueldo fijo mensual de 1000 euros, más una comisión que viene dada por la función $17x - 0{,}0025x^3$, donde x representa el número de pólizas vendidas.
Si el vendedor tiene mensualmente un gasto general de 200 euros, más otro de 5 euros por póliza contratada, calcula el número de pólizas que debe contratar mensualmente para que su ganancia sea máxima, ¿a cuánto asciende dicha ganancia? Sol.- 40 pólizas; ganancias 1120 euros; **Sept.06**

19. El número de vehículos que pasaron cierto día por el peaje de una autopista viene representada por la función:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & 0 \leq t \leq 9 \\ 10 - \left(\dfrac{t-15}{3}\right)^2 & 9 < t \leq 24 \end{cases}$$

Donde N indica el número de vehículos y t representa el tiempo transcurrido (en horas) desde las 0:00 horas.
a) ¿Entre qué horas aumentó el número de vehículos que pasaban por el peaje?¿Entre qué horas disminuyó?
b) ¿A qué hora pasó el mayor número de vehículos?¿Cuántos fueron?.

Sol.- aumentó (3:00, 15:00); disminuyó (0:00, 3:00) y (15:00, 24:00); **Jun.05**

20. Se quiere fabricar una caja de madera sin tapa con una capacidad de 2 m^3. Por razones de portabilidad en el transporte de la misma, el largo de la caja ha de ser doble que el ancho. Además, la madera para construir la base de la caja cuesta 12 euros por metro cuadrado, mientras que la madera para construir las caras laterales cesta 8 euros por metro cuadrado. Hallar las dimensiones de la caja para que el coste sea mínimo. Calcular dicho coste mínimo.

Sol.- x = 1, y = 1, z = 2; Coste mínimo 72 euros; **Jun.05**

21. Se quiere cercar un campo rectangular que limita con un camino por uno de sus lados. Si la cerca del lado del camino cuesta 6 euros/m y la de los otros lados 2 euros/m, hallar las dimensiones del campo de área máxima que puede cercarse con 2560 euros.

Sol.- x =160, y = 320; Coste = 2560 euros; **Sept.05**

22. La función f(t), 0 < t < 10, en la que el tiempo t está expresado en años, representa los beneficios de una empresa (en cientos de miles de euros) entre los años 1990 (t = 0) y 2000 (t = 10)

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & si \quad 0 \leq t < 2 \\ t^2 - 8t + 15 & si \quad 2 \leq t < 6 \\ \frac{3}{4}(-t+10) & si \quad 6 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente f(t), estudiando: puntos de corte, intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) ¿En qué años alcanzó la empresa el máximo beneficio?¿Cuál fue dicho beneficio?¿Durante cuánto tiempo hubo pérdidas?

Sol.- 1992 y 1996; Benef. = 300000; pérdidas entre 1993 y 1995; **Sept.05**

23. La función del coste total de producción de x unidades de un determinado producto es

$$C(x) = \frac{x^3}{100} + 8x + 20$$

a) Se define la función de coste medio por unidad como$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$, ¿Cuántas unidades "x_0" es necesario producir para que sea mínimo el coste medio por unidad?
b) ¿Qué relación existe entre $Q(x_0)$ y $C'(x_0)$?

Sol.- x = 10; $C'(x) = Q(x) - \frac{20}{x} + \frac{x^2}{50}$; **Jun.04**

24. Una enfermedad se propaga de tal manera que, después de t semanas ha afectado a N(t) cientos de personas, donde

$$N(t) = \begin{cases} 5 - t^2(t-6) & para \quad 0 \leq t \leq 6 \\ -\frac{4}{4}(t-10) & para \quad 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de N(t). calcular el máximo de personas afectadas y la semana en la que se presenta ese máximo. Calcular también la semana en que se presenta el punto de inflexión en el número de personas afectadas.
b) ¿A partir de qué semana la enfermedad afecta a 250 personas como máximo?

Sol.- crec (0, 4); decrec (4, 10);t =4; t=2; t=8; **Jun.04**

25. Los beneficios (en millones de euros por año) estimados para una empresa se ajustan a la siguiente función:

$$B(x) = \frac{5x}{x^2+4}, x \geq 0$$

donde B representa los beneficios de la empresa y x los años transcurridos desde el momento de su constitución (x = 0).
a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de B(x). ¿Qué información nos dan sobre la evolución de los beneficios a lo largo del tiempo?
b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el máximo beneficio?

Sol.- crec $0<x<2$; decrec $x>2$; x=2, B=1,25; **Sept.04**

26. Se compra un equipo industrial en 1990 (x = 0) y se sabe que genera unos ingresos de

$$R(x) = 6125 - \frac{125}{4}x^2$$

(miles de euros anuales) x años después de comprarlo.
Al mismo tiempo, los costos de funcionamiento y mantenimiento son $C(x)= 2000 + 10x^2$ miles de euros anuales.
a) Representar las gráficas de las funciones R(x) y C(x).
b) ¿Durante cuántos años fue rentable el equipo?
c) ¿En qué año el beneficio fue máximo y a cuánto ascendió el mismo?

Sol.- rentable los 10 primeros años; x=0, B(0)=4125; **Sept.04**