Distribuciones discretas. Distribución binomial

Variables aleatorias discretas y continuas

Se llama ***variable aleatoria*** a toda función definida en el espacio muestral de un experimento aleatorio que asocia a cada elemento del espacio un número real.
Se clasifican en discretas y continuas

Variable aleatoria DISCRETA: cuando solo puede tomar ciertos valores aislados

Variable aleatoria CONTINUA: cuando puede tomar, al menos teóricamente, todos los valores posibles dentro de un cierto intervalo de la recta real

Función de probabilidad. Propiedades

DEFINICIÓN
La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X es la aplicación que asocia a cada valor x_i de la variable su probabilidad p_i

Se representa en una tabla:

X	x_1 x_2 x_3 ………………… x_n
$p_i=P(X=x_i)$	P_1 p_2 p_3 ………………… p_n

PROPIEDADES:

1.- La probabilidad p_i de un valor x_i, $p_i=P(X=x_i)$, es un número no negativo entre 0 y 1

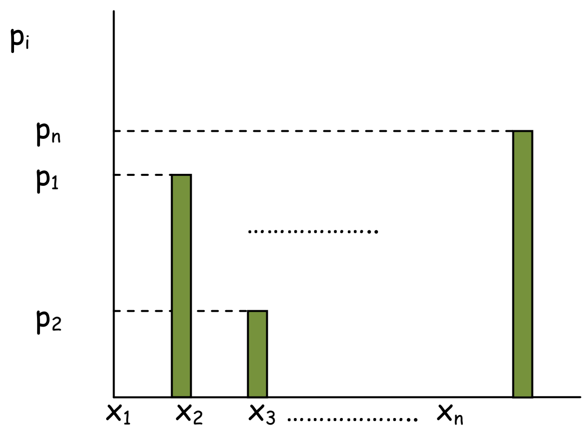
$$0 \leq p_i \leq 1$$

2.- La suma de las probabilidades de los valores del recorrido de la variable es 1

$$\sum_i p_i = 1$$

3.- La probabilidad de que una variable aleatoria tome algún valor dentro de un conjunto de valores concretos es la suma de las probabilidades asociadas a cada uno de ellos.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA
La representación es un ***DIAGRAMA DE BARRAS***



Distribuciones discretas. Distribución binomial

Función de distribución

DEFINICIÓN

Dada una variable aleatoria X, se define la función de distribución de X como sigue

$$F(x) = P(X \leq x) \quad \forall x \epsilon R$$

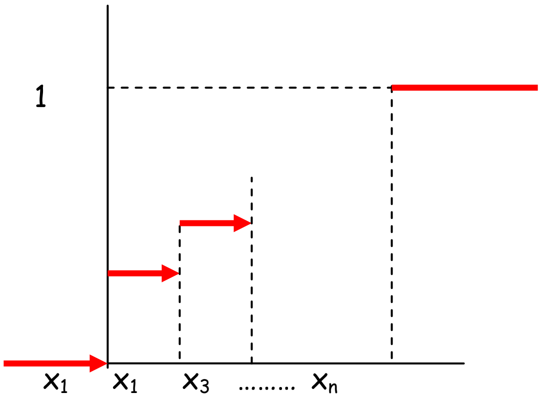
Es decir, la función de distribución asigna a cada número real x la probabilidad acumulada hasta dicho valor

PROPIEDADES

1. $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x \epsilon R$, es decir, la gráfica de una función de distribución está siempre en la franja (0,1).
2. $\forall a \leq b \quad P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
3._La función de distribución es continua por la derecha en todo punto. No puede afirmarse lo mismo respecto a la izquierda, ya que para una variable discreta, se trata de una función escalonada.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA (escalonada)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_1 \\ F_1 & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2 \\ \dots & \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$



Parámetros en distribuciones discretas

Media o esperanza matemática

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Varianza

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$$

Desviación típica: raíz cuadrada positiva de la varianza, se representa por "σ"

Distribuciones discretas. Distribución binomial

Distribución Binomial o de Bernouilli

Un experimento que tiene las siguientes características sigue el modelo de una ***distribución binomial:***

1. En cada prueba del experimento solo son posibles dos resultados, el suceso A al que se llama **éxito**, y su contrario $\bar{A}$ al que se llama **fracaso**
2. El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados obtenidos en las pruebas anteriores.
3. La probabilidad del suceso A es **constante** en todas las pruebas.

Se representa por **p** la probabilidad de A, y por **q = 1-p** la probabilidad de $\bar{A}$

La variable X que representa el número de éxitos obtenidos en n pruebas se dice que sigue una distribución binomial.

Esta variable es discreta, ya que si se realizan n pruebas se podrán obtener 0, 1, 2, …,n éxitos.

Los parámetros que caracterizan una distribución binomial son el número de pruebas realizadas, **n**, y la probabilidad del suceso éxito, **p**.

Esta distribución se representa por **B (n, p)**

Función de probabilidad de la distribución binomial

Se considera un experimento aleatorio cuyos resultados únicamente pueden ser el suceso A = " éxito" y el suceso $\bar{A}$ = "fracaso", con probabilidades p y q = 1 – p

Se realizan n pruebas del experimento.

La probabilidad de obtener r éxitos en n pruebas viene dado por:

$$\mathrm{P(obtener\ r\ éxitos)} = \mathrm{P(X=r)} = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$$

Esta expresión recibe el nombre de función de probabilidad de la distribución binomial.

Parámetros de la distribución binomial

Media: $\mu = n \cdot p$

Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$

Desviación típica: $\sigma = +\sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Distribuciones discretas. Distribución binomial

Problemas resueltos

1.- Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad es:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,1	0,4	0,1	0,1

a) Comprueba que es una función de probabilidad y represéntala

b) Calcula y representa la función de distribución

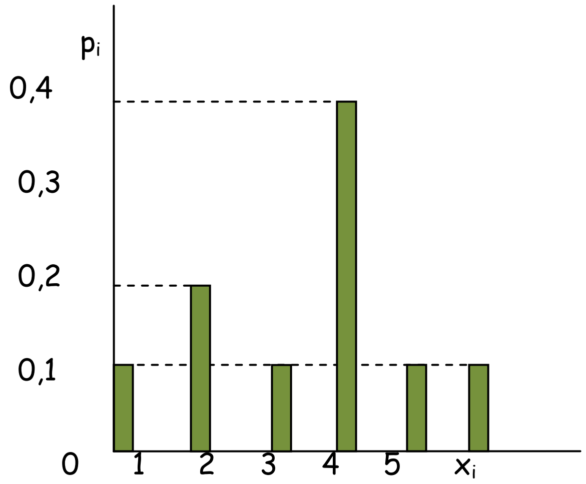
c) Calcula las siguientes probabilidades: $p(X<4)$; $p(X \geq 3)$; $p(3 \leq X \leq 5)$

Solución:

a) Función de probabilidad $\rightarrow \sum p_i = 1$, además $0 \leq p_i \leq 1$

$$\sum p_i = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 = 1$$

Representación

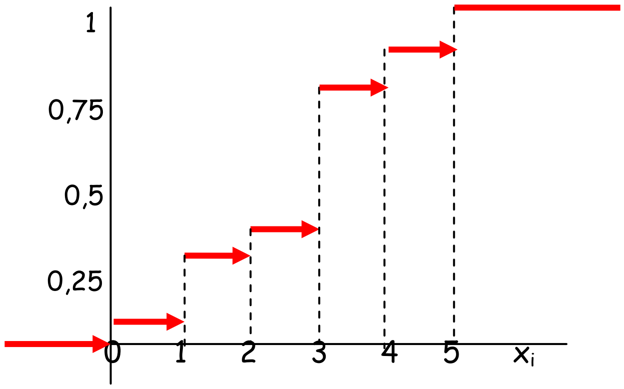


b) Función de distribución

"la función de distribución asigna a cada número real x la probabilidad acumulada hasta dicho valor" $F(x) = P(X \leq x) \quad \forall x \epsilon R$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}1 & 0 \leq x < 1 \\ 0{,}3 & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}4 & 2 \leq x < 3 \\ 0{,}8 & 3 \leq x < 4 \\ 0{,}9 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & 5 \leq x \end{cases}$$

Representación



c) p(X<4)= p (x =0) + p(x = 1) + p(x =2) + p(x =3) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,4 = 0,8

p(X $\geq$ 3) = 1 – p(x<3) = 1 - 0,4 = 0,6

p(3 $\leq$ X $\leq$ 5) = p (x=3) + p(x=4) + p(x=5)= 0,4 + 0,1 +0,1 = 0,6

2.- Después de realizar varios sondeos sobre cierta población, se ha conseguido averiguar que únicamente el 15% de la misma es favorable a los tratamientos de psicoterapia. Se escoge al azar una muestra de esa población formada por 8 personas.

a) Comprueba que la variable que expresa el número de personas favorables a los tratamientos de psicoterapia dentro de la muestra sigue una distribución binomial y señala los parámetros de la distribución.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 6 personas sean favorables al tratamiento de psicoterapia? ¿Y qué lo sean exactamente 4 personas?
c) Halla la media y la desviación típica.

Solución:

a) (1°) En cada prueba solo son posibles dos resultados:
A = " persona favorable" y $\bar{A}$ = " persona no favorable"
(2°) El resultado obtenido de la pregunta (favorable, no favorable) a cada persona es independiente de los otros
(3°) La probabilidad del suceso A es constante p = 0,15
Los parámetros son n = 8 y p = 0,15 . Por tanto se trata de una binomial **B(8, 0,15)**

b) $\mathrm{P(X = r)} = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$
*Al menos 6 significa que pueden ser favorables 6,7 y 8 personas
Siendo p = 0,15 y q = 1- 0,15 = 0,85

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$$

$$P(X \geq 6) = \binom{8}{6} 0{,}15^6 \cdot 0{,}85^2 + \binom{8}{7} 0{,}15^7 \cdot 0{,}85^1 + \binom{8}{8} 0{,}15^8 \cdot 0{,}85^0$$

Para resolver utilizamos las tablas

$$P(X \geq 6) = 0{,}0002 + 0{,}0000 + 0{,}0000 = 0{,}0002$$

*Exactamente 4 personas

$$P(X = 4) = \binom{8}{4} 0{,}15^4 \cdot 0{,}85^4 = 0{,}0185$$

c) Media μ = n · p → μ = 8 · 0,15 = 1,2

d) Desviación típica: $\sigma = +\sqrt{n \cdot p \cdot q}$ → $\sigma = +\sqrt{8 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} = 1{,}009$