CÁLCULO DE PROBABILIDADES

EXPERIMENTOS ALEATORIOS.ESPACIO MUESTRAL

Experimento determinista: Aquel cuyo resultado se puede predecir de antemano, está regido por leyes, sean o no de la Naturaleza.
Ej.- Medir la aceleración de un objeto que se deja caer al vacío

Experimento aleatorio: Aquel en el que interviene el azar, resultando en consecuencia impredecible. Ej.- Lanzar un dado
Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio lo llamaremos **espacio muestral** y lo designamos por **E**
Ej.- Experimento aleatorio "lanzar un dado cúbico" ; espacio muestral E = {1,2,3,4,5,6}

SUCESO ALEATORIO

Se llama **SUCESO** de un experimento aleatorio a cada uno de los **subconjuntos** del espacio muestral E.
El conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio se denomina ***espacio de sucesos*** y se designa por **S.**
Ej.- para E = {1,2,3,4,5,6}, se consideran los siguientes subconjuntos:

- A= "salir nº par" ={2,4,6}
- B= "salir nº menor que 5" = {1,2,3,4}

En un experimento aleatorio con un espacio muestral de n elementos (n finito), el conjunto de espacio de sucesos tendrá $\mathbf{2^n}$ sucesos distintos.

TIPOS DE SUCESOS

– **Suceso elemental**: Aquel que está formado por un único punto muestral, es decir, por un único resultado del experimento aleatorio.

– **Suceso compuesto**: El que está formado por 2 o más resultados elementales.

– **Suceso seguro**: El que está formado por todos los resultados posibles del experimento. Coincide por lo tanto con el espacio muestral.

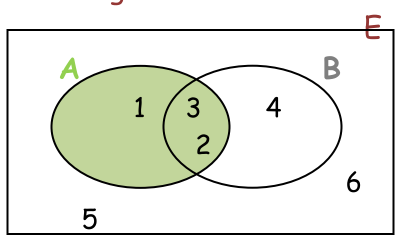
– **Suceso imposible**: El que no se puede realizar, se representa por $\emptyset$

– **Sucesos iguales**: Aquellos que están formados por los mismos sucesos elementales.

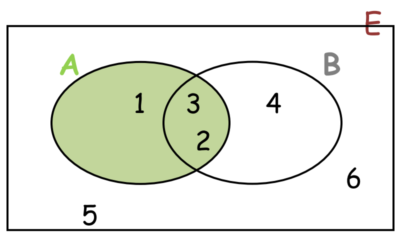
– **Suceso incluido**: El suceso A se dirá incluido en el suceso B, si todos los resultados elementales de A, están incluidos en el suceso B. Representamos tal situación como $A \subset B$

OPERACIONES CON SUCESOS

Diagrama de Venn



Dado cúbico, con las caras numeradas del 1 al 6
Sucesos: A = {1,2,3} ; B = {2,3,4}



1. Unión de sucesos

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, se llama **suceso unión de A y B** el que se produce cuando se realiza **A o B**, es decir, **<u>alguno de los dos</u>**.
Se designa por **AUB**

2. Intersección de sucesos

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, se llama **suceso intersección de A y B** el que se produce cuando se realizan **<u>simultáneamente</u> A y B**.
Se designa por $\boldsymbol{A \cap B}$

AUB = {1,2,3,4} ; $\boldsymbol{A \cap B}$ = {2,3}

Sucesos compatibles e incompatibles

Se consideran ahora los sucesos:
C = "salir un nº impar" = {1,3,5} y D = " Salir un múltiplo de 4" ={4}
Es evidente que $C \cap D = \emptyset$, es decir, el suceso imposible

Si la intersección de dos sucesos es el suceso imposible, se dice que dichos sucesos son incompatibles

Si A y B son sucesos del mismo experimento aleatorio, se tiene que:
*Si $A \cap B = \emptyset,\ \ A\ y\ B\ son\ incompatibles$
*Si $A \cap B \neq \emptyset,\ \ A\ y\ B\ son\ compatibles$

LEYES DE MORGAN

1º El contrario de la unión es la intersección de los contrarios

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

2º El contrario de la intersección es la unión de los contrarios

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

3. Diferencia de sucesos

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, se llama **suceso diferencia de A y B** el suceso $\boldsymbol{A \cap \bar{B}}$, es decir, el que se produce cuando se realiza el suceso A, pero no se realiza B.
Se designa por **A – B**

Propiedades de la Unión: Dados los sucesos A, B, C ∈ S, se verifican las siguientes propiedades:
– Asociativa: (*A* U*B*) U *C* = *A* U (*B* U*C*)

– Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$
– Idempotente: $A \cup A = A$
– Complementación: $A \cup A^C = E$
– Elemento neutro: $A \cup \Phi = A$

Propiedades de la Intersección: Dados los sucesos A, B, C∈S, se verifican las siguientes propiedades:

– Asociativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
– Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$
– Idempotente: $A \cap A = A$
– Complementación: $A \cap A^C = \emptyset$
– Elemento neutro: $A \cap E = A$
– Elemento Absorbente: $A \cap \emptyset = \emptyset$

Propiedades relacionales de Unión e Intersección: Se trata de tres propiedades que relacionan ambas operaciones:

– Simplificativas o de absorción: $A \cup (B \cap A) = A$; $A \cap (B \cup A) = A$
– Distributiva de la Unión respecto de Intersección:
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
– Distributiva de la Intersección respecto de la Unión:
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

La terna $(S, \cup, \cap)$ con las propiedades reseñadas respecto a Unión e Intersección, asociada al espacio muestral E, recibe el nombre de Álgebra de Boole de sucesos aleatorios. UI

FRECUENCIA DE UN SUCESO

Si A es un suceso cualquiera de un experimento aleatorio y n es el número de pruebas que se realizan, se define la **frecuencia absoluta de A** y se denota **f(A)**, como el *número de veces que el suceso A se ha presentado a lo largo de las n pruebas.*

En analogía con la estadística uni y bidimensional, se define la **frecuencia relativa** y se denota **f_r(A)**, como el *número de veces que se ha presentado el suceso A, en relación al número total de pruebas n.*

Así pues: $f_r(A) = \frac{f(A)}{n}$

De la propia definición, pueden extraerse estas consecuencias:

$0 \leq f_r(A) \leq 1$; $\sum_i f_r(A_i) = 1$

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD. REGLA DE LAPLACE

Si un espacio muestral es equiprobable, entonces la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles.

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{número de casos favorables al suceso A}}{\text{número de casos posibles}}$$

Esta definición fue enunciada por Laplace, y por ello se conoce como **Regla de Laplace**.
Los **casos posibles** son todos los resultados del experimento, es decir, todos los elementos del espacio muestral.
Los **casos favorables** son los elementos que componen el suceso A.

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD (Kolmogorov)

Llamamos Probabilidad a una ley (función o aplicación) que asocia a cada suceso A, de un espacio de sucesos, un número real que llamamos probabilidad de A y representamos por P(A), que cumple los siguientes axiomas:

A1. La probabilidad de cualquier suceso es un número positivo o nulo

$$P(A) \geq 0$$

A2. La probabilidad del suceso cierto es 1.

$$P(E) = 1$$

A3. Si los sucesos A y B son incompatibles, la probabilidad del suceso A U B es la suma de probabilidades de los sucesos A y B.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Consecuencias de la definición axiomática de Probabilidad

1. $A \subset \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{P(A) \leq P(B)}$
2. $\forall A \in S \Rightarrow 0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1$
3. La probabilidad del suceso $\bar{A}$, contrario del suceso A, es igual a 1 menos la probabilidad del suceso A ; $\mathrm{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$
4. La probabilidad del suceso imposible es cero ; $P(\emptyset) = 0$

PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE SUCESOS COMPATIBLES

Si A y B son dos sucesos compatibles de un mismo experimento aleatorio, se verifica que la probabilidad de la unión de A y B es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos menos la probabilidad del suceso intersección de A y B

$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Esta relación se verifica para cualquier pareja de sucesos, ya sean compatibles o incompatibles.

Observa que si A y B son incompatibles $P(A \cap B) = 0$

Esta expresión se puede extender al caso de más de dos sucesos. En el caso de tres sucesos sería:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$