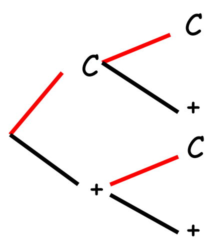
PROBABILIDAD CONDICIONADA

EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Un experimento compuesto es aquel que se realiza en varias fases o etapas.
Ejemplo: Se lanza una moneda dos veces y se observa el número total de caras obtenidas. En este caso se trata de un experimento compuesto en dos etapas. El espacio muestral es:

E ={ C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}



PROBABILIDAD CONDICIONADA

Se llama probabilidad condicionada del suceso A respecto del suceso B, y se denomina por P(A/B), el cociente siguiente:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{si } P(B) \neq 0$$

Análogamente, la probabilidad condicionada del suceso B respecto del suceso A, dada por P(B/A)

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{si } P(A) \neq 0$$

SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

Dos sucesos A y B son independientes si P(B) = P(B/A)

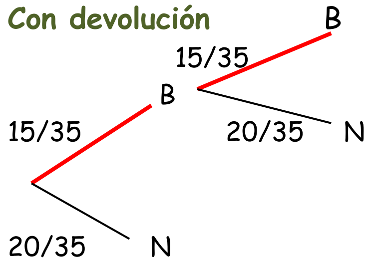
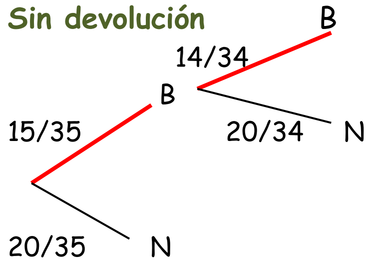
Dos sucesos A y B son dependientes si P(B) ≠ P(B/A)

Otra forma de caracterizar la independencia de sucesos es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ P(B/A) = P(B) \end{array}\right\} \rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo:

Se tiene una urna con 20 bolas negras y 15 bolas blancas, se realizan dos extracciones sucesivas de una bola. Halla la probabilidad de que las dos bolas sean blancas en los siguientes casos:
a) Con devolución a la urna de la 1ª bola extraída; b) Sin devolución

	$\mathrm{P}(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_1) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}_2/\mathrm{B}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_1) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}_2)$ $P(B_1 \cap B_2) = \frac{15}{35} \cdot \frac{15}{35} = \frac{9}{49}$ Sucesos INDEPENDIENTES
	$\mathrm{P}(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_1) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}_2/\mathrm{B}_1)$ $P(B_1 \cap B_2) = \frac{15}{35} \cdot \frac{14}{34} = \frac{3}{17}$ Sucesos DEPENDIENTES

PROBABILIDAD COMPUESTA O DE LA INTERSECCIÓN DE SUCESOS

- Consideremos un experimento compuesto formado por n experimentos aleatorios *independientes* dos a dos. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n sucesos, correspondientes cada uno de ellos a cada uno de los experimentos aleatorios. Entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

La probabilidad de un experimento compuesto por *sucesos independientes* ***es el producto de las probabilidades de las ramas del diagrama de árbol*** que forman el camino que da lugar al resultado buscado. (Teorema de la probabilidad compuesta)

- Consideremos un experimento compuesto formado por n experimentos aleatorios *dependientes* dos a dos. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n sucesos, correspondientes cada uno de ellos a cada uno de los experimentos aleatorios. Entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

La probabilidad de un experimento compuesto por *sucesos dependientes* ***es el producto de las probabilidades de las ramas del diagrama de árbol*** que forman el camino que da lugar al resultado buscado. (Teorema de la probabilidad compuesta)

PROBABILIDAD TOTAL

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades de B/A. entonces, la probabilidad del suceso B viene dada por la siguiente expresión:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Este resultado se conoce con el nombre de ***teorema de la probabilidad total***

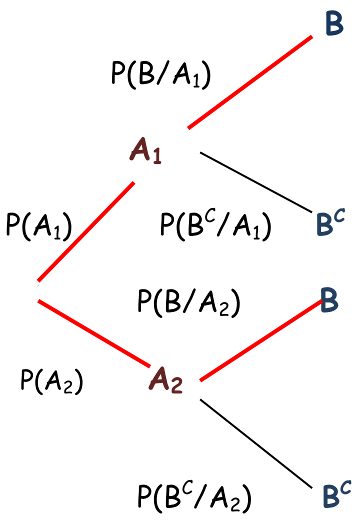
TEOREMA DE BAYES

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades de A_i/B. El teorema de Bayes establece que las probabilidades $P(A_i/B)$ vienen dadas por la siguiente expresión:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}$$

ESQUEMAS PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ESQUEMA DE DIAGRAMA DE ÁRBOL



$\boldsymbol{P(B \cap A_1) = P(A_1) \cdot P(B/A_1)}$

$\boldsymbol{P(B^C \cap A_1) = P(A_1) \cdot P(B/A_1)}$

$\boldsymbol{P(B \cap A_2) = P(A_2) \cdot P(B/A_2)}$

$\boldsymbol{P(B^C \cap A_2) = P(A_2) \cdot P(B/A_2)}$

En este ejemplo: $\boldsymbol{P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)}$

ESQUEMA TABLA DE CONTINGENCIA

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\bar{A}}$	
$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{P(A \cap B)}$	$\boldsymbol{P(\bar{A} \cap B}$	$\boldsymbol{P(B)}$
$\boldsymbol{\bar{B}}$	$\boldsymbol{P(A \cap \bar{B})}$	$\boldsymbol{P(\bar{A} \cap \bar{B})}$	$\boldsymbol{P(\bar{B})}$
	$\boldsymbol{P(A)}$	$\boldsymbol{P(\bar{A})}$	**1**